

No. of Printed Pages : 16

BMTC–132

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BSCG)**

Term-End Examination

December, 2023

BMTC-132 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 100

Note : (i) *All questions in Section A and Section B are compulsory.*

(ii) *In Section C, do any **five** questions out of six questions.*

(iii) *Use of calculator is not allowed.*

Section–A

1. State whether the following statements are True or False. Give a short proof or a counter-example in support of your answer : $10 \times 2 = 20$

(i) If $\cos \alpha, \cos \beta$ and $\cos \gamma$ are the direction cosines of a line, then

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$$

P. T. O.

(ii) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right) = 0$

(iii) If :

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^3$$

then $f_y(x, y) = 3y^2$.

(iv) Function $f(x, y) = \tan \frac{y}{x}$ is a non-homogeneous function.

(v) The degree of the differential equation :

$$y = x \frac{dy}{dx} + \frac{b}{\frac{dy}{dx}}$$

is one.

(vi) The differential equation :

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

is non-linear.

(vii) The solution of $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$ is given by

$$e^y = e^x + c.$$

(viii) The integrating factor of the differential equation :

$$(3x^2y^4 + 2xy)dx + (2x^3y^3 - x^2)dy = 0$$

is given by $\frac{1}{y^2}$.

(ix) $y = e^x$ is a solution of the homogeneous equation :

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

if $1 + P + Q = 0$.

(x) If :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

then $f_{xy} = 1$.

Section—B

2. (a) Solve the differential equation : 4

$$x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \log x$$

- (b) Show that the differential equation 6

$$(2xz - yz)dx + (2yz - xz)dy - (x^2 - xy + y^2)dz = 0$$

is integrable and find its integral.

3. (a) Solve the differential equation by using the method of variation of parameters : 5

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} - 3y = 64xe^{-x}$$

- (b) Solve the differential equation by using the method of undetermined coefficients : 5

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} = 12x - 10$$

4. (a) Find the first order partial derivatives of the function : 2

$$z = x \sin y + y \cos x$$

- (b) Show that the following function f is not differentiable at $(0, 0)$: 6

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (c) Find the equation of the line passing through the points (1, 2, 3) and (0, 1, -1). 2

Section—C

5. (a) Solve the differential equation : 5

$$(xy^3 + y)dx + 2(x^2y^2 + x + y^4)dy = 0$$

- (b) In a certain city the population gets doubled in 2 years and after 3 years the population is 20,000. Find the number of people initially being living in the city. 5
6. (a) Transform the given equation to Clairaut's form and hence find its general solution : 6

$$x^2(y - px) = yp^2$$

- (b) Find the differential equations of the space curves in which two families of surfaces

$$u = x^2 + y^2 + z^2 = c_1 \text{ and } v = x + z = c_2$$

intersect. 4

7. (a) Find the envelope of the family of straight lines :

$$x \sec^2 \theta + y \operatorname{cosec}^2 \theta = \alpha,$$

θ being the parameter. 5

- (b) Solve the simultaneous equations : 5

$$\frac{a dx}{(b-c)yz} = \frac{b dy}{(c-a)zx} = \frac{c dz}{(a-b)xy}$$

8. (a) If :

$$u = \sin^{-1} \frac{x^2 + y^2}{x + y}$$

$$0 < x < 1$$

$$0 < y < 1$$

prove that : 5

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \tan u .$$

- (b) Find the limit of

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

as $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ along the lines (i) $y = x$
(ii) $y = 7x$. What can you conclude about

$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$? Justify your answer. 5

9. (a) Show that :

$$f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$$

for the function $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ defined by : 5

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^5}{x^2 + y^4}, & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(b) Solve the differential equation : 5

$$2x \frac{dy}{dx} + y(6y^2 - x - 1) = 0$$

10. (a) Check the continuity of the following
function at $(0, 0)$: 5

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{if } f(x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{1}{2}, & \text{if } f(x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(b) If :

5

$$f(x, y) = x^3 - x^2y^2 + 2xy + y^2$$

then find the polynomial given by :

$$\begin{aligned} f_{xx}(1,1)(x-1)^2 + f_{xy}(1,1)(x-1)(y-1) \\ + f_{yy}(1,1)(y-1)^2. \end{aligned}$$

BMTC-132

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. एस. सी. जी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2023

बी.एम.टी.सी.-132 : अवकल समीकरण

समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : 100

नोट : (i) अनुभाग 'अ' और अनुभाग 'ब' में सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(ii) अनुभाग 'स' में, छः प्रश्नों में से कोई भी पाँच प्रश्न कीजिए।

(iii) कैल्कुलेटरो क उपयोग की अनुमति नहीं है।

अनुभाग—अ

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य।
अपने उत्तर के पक्ष में लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण दीजिए :

10×2=20

(i) यदि $\cos \alpha, \cos \beta$ और $\cos \gamma$ एक रेखा की दिक् कोज्याएँ हैं, तो

$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$ होता है।

(ii) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right) = 0$ है।

(iii) यदि :

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^3$$

है, तो $f_y(x, y) = 3y^2$ है।

(iv) फलन $f(x, y) = \tan \frac{y}{x}$ एक असमघात फलन है।

(v) अवकल समीकरण :

$$y = x \frac{dy}{dx} + \frac{b}{\frac{dy}{dx}}$$

की घात एक है।

(vi) अवकल समीकरण

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

अरैखिक है।

(vii) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$ का हल $e^y = e^x + c$ द्वारा दिया

जाता है।

(viii) अवकल समीकरण

$$(3x^2y^4 + 2xy)dx + (2x^3y^3 - x^2)dy = 0$$

का समाकलन गुणक $\frac{1}{y^2}$ द्वारा दिया जाता है।

(ix) $y = e^x$ समघात समीकरण

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

का एक हल है, यदि $1 + P + Q = 0$ है।

(x) यदि :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

है, तो $f_{xy} = 1$ है।

अनुभाग—ब

2. (क) अवकल समीकरण

$$x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \log x$$

को हल कीजिए।

4

(ख) दर्शाइए कि अवकल समीकरण

$$(2xz - yz)dx + (2yz - xz)dy - (x^2 - xy + y^2)dz = 0$$

समाकलनीय है तथा इसका समाकल ज्ञात कीजिए। 6

3. (क) प्राचलों के विचरण की विधि के उपयोग द्वारा अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2dy}{dx} - 3y = 64xe^{-x}$$

को हल कीजिए। 5

(ख) अनिर्धारित गुणांकों की विधि के उपयोग द्वारा

$$\text{अवकल समीकरण } \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = 12x - 10 \text{ को}$$

हल कीजिए। 5

4. (क) फलन

$$z = x \sin y + y \cos x$$

के प्रथम कोटि आंशिक अवकलज ज्ञात कीजिए।

(ख) दर्शाइए कि फलन (f)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(0, 0) पर अवकलनीय नहीं है। 6

(ग) बिन्दुओं (1, 2, 3) और (0, 1, -1) से होकर जाने वाली रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए। 2

अनुभाग—स

5. (क) अवकल समीकरण

$$(xy^3 + y)dx + 2(x^2y^2 + x + y^4)dy = 0$$

को हल कीजिए। 5

(ख) किसी विशेष शहर में, जनसंख्या 2 वर्षों में दुगुनी हो जाती है। तीन वर्ष बाद जनसंख्या 20,000 है। उस शहर में प्रारम्भ में रहने वाले व्यक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए। 5

6. (क) दी हुई समीकरण को क्लैरैट-रूप में लिखिए तथा फिर इसका व्यापक हल ज्ञात कीजिए : 6

$$x^2(y - px) = yp^2$$

(ख) उन समष्टि वक्रों के अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए, जिनमें पृष्ठों $u = x^2 + y^2 + z^2 = c_1$ और $v = x + z = c_2$ क दो कुल प्रतिच्छेद करते हैं। 4

7. (क) सरल रेखाओं $x \sec^2 \theta + y \operatorname{cosec}^2 \theta = \alpha$, θ के कुल का अन्वालोप (लिफाफा) ज्ञात कीजिए, जहाँ θ एक प्राचल है। 5

(ख) युगपत समीकरणों को हल कीजिए : 5

$$\frac{a dx}{(b-c)yz} = \frac{b dy}{(c-a)zx} = \frac{c dz}{(a-b)xy}$$

8. (क) यदि : 5

$$u = \sin^{-1} \frac{x^2 + y^2}{x + y}$$

$$0 < x < 1$$

$$0 < y < 1$$

है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$$

(ख) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ की निम्नलिखित रेखाओं

के अनुदिश सीमाएँ ज्ञात कीजिए, जब $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ है :

(i) $y = x$

(ii) $y = 7x$

आप $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ के बारे में क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

5

9. (क) दर्शाइए कि :

5

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^5}{x^2 + y^4}, & \text{यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{यदि } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ के लिए, $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ है।

(ख) अवकल समीकरण

$$2x \frac{dy}{dx} + y(6y^2 - x - 1) = 0$$

को हल कीजिए।

5

10. (क) फलन

5

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{यदि } f(x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{1}{2}, & \text{यदि } f(x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

की $(0, 0)$ पर संततता की जाँच कीजिए।

(ख) यदि :

$$f(x, y) = x^3 - x^2 y^2 + 2xy + y^2$$

है, तो बहुपद

$$f_{xx}(1, 1)(x-1)^2 + f_{xy}(1, 1)(x-1)(y-1) + f_{yy}(1, 1)(y-1)^2$$

ज्ञात कीजिए।

5