No. of Printed Pages : 15 **BMTE-144**

B. SC. (GENERAL)/
B. A. (GENERAL)
(BSCG/BAG)
Term-End Examination
December, 2022
BMTE-144 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : (*i*) *Question No.* ***1*** *is compulsory.*

(*ii*) *Do any* ***eight*** *questions from Q. Nos.* ***2*** *to* ***10****.*

(*iii*) *Use of non-programmable scientific calculators is allowed.*

---

1. Which of the following statements are true and which are false ? Give a short proof or a counter-example in support of your answer : 2×10=20

(a) $\Delta\nabla = \Delta - \nabla$

(b) If

$$A = \begin{bmatrix} 1-a & -a \\ a & 1-a \end{bmatrix},$$

then $A^n = nA + (1-n)\,I$.

(c) Every square matrix is invertible.

P. T. O.

(d) If $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, then for $-\frac{2}{3} < k < 0$, the spectral radius of the matrix $(I + kA)$ is less than 1.

(e) If :

$$f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) = h^2 f''(\xi)$$

for some $\xi \in]x, x+2h[$, then $h > 0$.

(f) $\delta = E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}$

(g) All the eigen values of the matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

lie in the interval [0, 6].

(h) If :

$$P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6x - 10,$$

then $P'(-1) = 15$.

(i) The inverse of a upper triangular matrix is a lower triangular matrix.

(j) The maximum number of real (positive or negative) roots of the equation :

$$4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$$

is 4.

2\. (a) Find an interval of unit length that contains the smallest positive root of the equation $x^4 - x - 10 = 0$. Take the end points of this interval as initial approximation and perform two iterations of the Regula-Falsi method. 5

(b) Show by induction that $\Delta^n\left(e^x\right) = \left(e^h - 1\right)^n e^x$, where Δ is the forward difference operator. 3

(c) Show that : 2

$$\Delta f_i^2 = \left(f_i + f_{i+1}\right)\Delta f_i,$$

where Δ is the forward difference operator and $f_i = f\left(x_i\right)$.

3\. (a) Find the inverse of the matrix : 5

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

using LU factorization method.

(b) Derive the Newton-Raphson method to obtain a simple root of the equation $f(x) = 0$. Find its rate of convergence. 5

4\. (a) A linear system of equations $Ax = b$, where $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & 1 & 3 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $k \neq \pm 1$ is to be solved using the Gauss-Jacobi iteration method. Find the condition on k so that this method converges. 5

(b) The function $f(x) = (1 + x)^6$ is to be tabulated at equispaced points in the interval [0, 1] using quadratic interpolation. Find the largest step size that can be used so that the error $\leq 5 \times 10^{-3}$ in magnitude. 5

5\. (a) Perform three iterations of the inverse power method to obtain the smallest eigen value in magnitude of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

Take the initial approximation to the eigen vector as $[0.9, 1.0]^T$. 5

(b) Obtain the Lagrange's interpolating polynomial which fits the following data :

x	$f(x)$
-1	1
1	3
5	31
7	57

Hence find $f(3)$. 5

6. (a) Obtain an approximate value of $y(1.4)$ using the Taylor's series method of order three, for the initial value problem $y' = x - y^2, y(1) = 2$ with $h = 0.2$. 5

(b) Evaluate the integral :

$$I = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1}\, dx$$

using composite Simpson's rule with 3 and 5 nodal points. Find the improved value using Romberg integration. 5

7. (a) For the numerical differentiation formula :

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)\right]$$

(i) Find the order of the method. 2

(ii) Write the error term in power series of h. 2

(iii) Derive the corresponding Richardson's extrapolation scheme. 2

(b) The equation $x^4 - 5.25\ x^2 - 6.25 = 0$ has a root close to – 2.2. Perform one iteration of the Birge-Vieta method to find the root. 4

8. (a) The equation $x^2 + ax + b = 0$ has two real roots p and q such that $|p| < |q|$. If we use the fixed point iteration $x_{k+1} = -\dfrac{b}{x_k + a}$ to find a root, then to which root does it converge ? 5

(b) Find a bound on the eigen values of the matrix :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

using Gerschgorin bounds. 5

9. (a) Using the Runge-Kutta fourth order method with $h = 0.2$, find an approximate value of y (0.2) for the initial value problem $y' = x^2 + y^2, y(0) = 1$. 5

(b) Using the Gauss-Jordan method, find the inverse of the following matrix : 5

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

10. (a) From the following data, find the number of students having weight between 60 and 70 kg : 5

Weight (in kg)	No. of Students
0—40	250
40—60	120
60—80	100
80—100	70
100—120	50

(b) Construct a fixed point iteration form $x = g(x)$ for the equation $x^3 + x^2 - 1 = 0$ so that the method converges in the interval [0, 1]. 5

BMTE-144

बी.एस-सी. (सामान्य)/बी. ए. (सामान्य)
(बी. एस-सी. जी/बी. ए. जी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2022
बी. एम. टी. ई.-144 : सांख्यिकीय विश्लेषण

समय : 3 घण्टे अधिकतम अंक : 100

नोट : (*i*) प्रश्न संख्या 1 करना अनिवार्य है।

(*ii*) प्रश्न संख्या 2 से 10 तक कोई **आठ** प्रश्न कीजिए।

(*iii*) अप्रोग्रामनीय वैज्ञानिक कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति है।

---

1. बताइए कि निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि के लिए एक संक्षिप्त उपपत्ति या प्रति-उदाहरण दीजिए :

$2\times10=20$

(i) $\Delta\nabla = \Delta - \nabla$

(ii) यदि :

$$A = \begin{bmatrix} 1-a & -a \\ a & 1-a \end{bmatrix},$$

तो $A^n = nA + (1-n)I$ होगा।

(iii) प्रत्येक वर्ग आव्यूह व्युत्क्रमणीय होता है।

(iv) यदि :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

है, तो $-\frac{2}{3} < k < 0$ के लिए आव्यूह $(I + kA)$ की स्पेक्ट्रमी त्रिज्या 1 से कम होगी।

(v) यदि किसी $\xi \in]x, x+2h[$ के लिए

$f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) = h^2 f''(\xi)$

है, तो $h > 0$ होगा।

(vi) $\delta = E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}$

(vii) आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ के सभी आइगेन मान अंतराल $[0, 6]$ में होते हैं।

(viii) यदि :

$$P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6x - 10$$

है, तो $P'(-1) = 15$ होगा।

(ix) उपरि त्रिभुजाकार आव्यूह का व्युत्क्रम निम्न त्रिभुजाकार आव्यूह होगा।

(x) समीकरण $4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$ के वास्तविक (धनात्मक या ऋणात्मक) मूलों की संख्या 4 है।

2. (क) एकक लम्बाई वाला वह अंतराल ज्ञात कीजिए जो समीकरण $x^4 - x - 10 = 0$ के सबसे छोटे धनात्मक मूल को अंतर्विष्ट करता हो। इस अंतराल के अंत्य बिन्दुओं को आदि सन्निकटन मानकर छेदिका विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए। 5

(ख) आगम द्वारा दिखाइए कि :

$$\Delta^n \left(e^x\right) = \left(e^h - 1\right)^n e^x$$

जहाँ Δ अग्रांतर संकारक है। 3

(ग) दिखाइए कि : 2

$$\Delta f_i^2 = \left(f_i + f_{i+1}\right)\Delta f_i$$

जहाँ Δ अग्रांतर संकारक और $f_i = f\left(x_i\right)$ है।

3. (क) LU वियोजन विधि से आव्यूह : 5

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

(ख) समीकरण $f\left(x\right) = 0$ का साधारण मूल ज्ञात करने के लिए न्यूटन-रैफ्सन विधि व्युत्पन्न कीजिए। इसकी अभिसरण-दर ज्ञात कीजिए। 5

4. (क) गाउस-जैकोबी पुनरावृत्ति विधि से रैखिक समीकरण निकाय $\mathrm{A}x = b$, जहाँ

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & 1 & 3 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; k \neq \pm 1$$ को हल करना है।

k पर प्रतिबंध ज्ञात कीजिए जिससे यह विधि अभिसरित होती हो। 5

(ख) अंतराल $[0,1]$ में फलन $f(x) = (1+x)^6$ के लिए द्वितीय घात अंतर्वेशन द्वारा समदूरी मानों की तालिका बनानी है। परिमाण में सबसे अधिक वह अंतर मालूम कीजिए जिससे कि त्रुटि $\leq 5 \times 10^{-3}$ हो। 5

5. (क) प्रतिलोम घात विधि की तीन पुनरावृत्तियाँ करके आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ का परिमाण में लघुतम आइगेन मान ज्ञात कीजिए। प्रारम्भिक सन्निकट आइगेन सदिश $[0.9 \quad 1.0]^T$ से आरंभ कीजिए। 5

(ख) लैग्रांज अंतर्वेशन बहुपद ज्ञात कीजिए जो निम्नलिखित आँकड़ों को आसंजित करता हो :

x	$f(x)$
-1	1
1	3
5	31
7	57

अतः $f(3)$ ज्ञात कीजिए। 5

6. (क) तृतीय कोटि टेलर श्रेणी विधि द्वारा आदि मान समस्या $y' = x - y^2, y(1) = 2$, जहाँ $h = 0.2$ के लिए $y(1.4)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। 5

(ख) 3 और 5 सोपान बिन्दु लेकर संयुक्त सिम्पसन नियम से समाकल : 5

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1}\,dx$$

का मान ज्ञात कीजिए। रोम्बर्ग समाकलन द्वारा प्राप्त परिणाम में सुधार कीजिए।

7. (क) संख्यात्मक अवकलन सूत्र

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)\right]$$

के लिए

(i) विधि की कोटि ज्ञात कीजिए। 2

(ii) h की घात श्रेणी में त्रुटि पद लिखिए। 2

(iii) इसके संगत रिचर्ड्सन बहिर्वेशन योजना व्युत्पन्न कीजिए। 2

(ख) समीकरण :

$$x^4 - 5.25\ x^2 - 6.25 = 0$$

का एक मूल - 2.2 के निकट है। इस मूल को ज्ञात करने के लिए बर्ज–विएटा विधि की एक पुनरावृत्ति कीजिए। 4

8. (क) समीकरण $x^2 + ax + b = 0$ के दो वास्तविक मूल p और q हैं, जहाँ $|p| < |q|$ है। यदि मूल प्राप्त करने के लिए हम नियत बिंदु पुनरावृत्ति $x_{k+1} = -\dfrac{b}{x_k + a}$ का प्रयोग करें तो यह किस मूल की ओर अग्रसरित होगी ? 5

(ख) गर्शगोरिन परिबंध का प्रयोग करके आव्यूह :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

के आइगेन मानों का परिबंध ज्ञात कीजिए। 5

9. (क) $h = 0.2$ लेकर आदि मान समस्या $y' = x^2 + y^2, y(0) = 1$ के लिए चतुर्थ कोटि रुंगे–कुट्टा विधि द्वारा $y(0.2)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। 5

(ख) गाउस-जॉर्डन विधि से सम्बन्धित आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए : 5

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

10. (क) निम्नलिखित आँकड़ों से 60 से 70 किग्रा. के बीच भार वाले विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए : 5

भार (किग्रा. में)	विद्यार्थियों की संख्या
0—40	250
40—60	120
60—80	100
80—100	70
100—120	50

(ख) समीकरण $x^3 + x^2 - 1 = 0$ के लिए $x = g(x)$ के रूप में ऐसी नियत बिन्दु पुनरावृत्ति बनाइए जो अंतराल $[0,1]$ में अभिसरित करे। 5