

No. of Printed Pages : 13

BMTC-134

**BACHELOR OF ARTS/BACHELOR OF
SCIENCE
(BAG/BSCG)**

Term-End Examination

December, 2022

BMTC-134 : ALGEBRA

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 100

Note : (i) *The question paper has **three** Sections—
Sections A, B and C.*

(ii) *All questions in Section A and Section B
are compulsory.*

(iii) *Do any **five** questions from those given
in Section C.*

(iv) *Use of calculator is not allowed.*

P. T. O.

Section—A

1. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer with a short proof or a counter-example : $1 \times 10 = 10$
- (i) Matrix multiplication is a binary operation on $\mathbf{M}_{m \times n}(\mathbf{C})$.
 - (ii) Every permutation of odd order is an odd cycle.
 - (iii) If a ring is not commutative, then its subrings are also not commutative.
 - (iv) Any commutative ring with unity can be embedded in a field.
 - (v) The set of two cycles form a group with respect to composition.
 - (vi) The symmetric group S_3 is the direct product of the subgroups $H = \langle (1, 2) \rangle$, $K = \langle (1, 2, 3) \rangle$.
 - (vii) If a ring has finitely many ideals, the ring is finite.
 - (viii) No unit in a ring can be a zero divisor.

- (ix) The relation \sim defined on \mathbf{N} by ' $a \sim b$ if a divides b or b divides a ' is an equivalence relation.
- (x) If \mathbf{R} is a ring with identity and \mathbf{R}' is a subring of \mathbf{R} with identity, then the identity elements of \mathbf{R} and \mathbf{R}' coincide.

Section—B

2. (a) Check that :

$$\mathbf{R} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

is a subring of $M_2(\mathbf{R})$. Does it have an identity element ? Is it a commutative ring ? Justify your answer. 5

- (b) Let G be a group and H and K be subgroups of G . State a necessary and sufficient condition for HK to be a subgroup of G . Also, show that, if one of H or K is a normal subgroup of G , then HK is a subgroup of G . 5

3. (a) Find all the subgroups of \mathbf{Z}_{15} . Also, give a subgroup diagram for \mathbf{Z}_{15} . 5

(b) Prove that : 5

$$\frac{5Z}{15Z} \equiv Z_3$$

4. (a) Check whether the polynomial :

$$x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 4x + 1$$

is irreducible by applying the mod p irreducibility test with $p = 2$. 7

(b) Let $X = \mathbf{N}$. Check that :

$$I = \{A \subseteq X \mid A \text{ is a finite set}\}$$

is an ideal in the ring $P(X, \Delta, \cap)$. 3

5. (a) Consider the group :

$$\mathbf{Q}_8 = \left\{ \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \right\}$$

where $i = \sqrt{-1}$. Obtain the elements of

$$\frac{\mathbf{Q}_8}{\mathbf{H}}, \text{ where } \mathbf{H} = \left\{ \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}. \text{ Also find the}$$

order of each element in $\frac{\mathbf{Q}_8}{\mathbf{H}}$. 5

(b) Find the g.c.d. of the polynomials

$$x^3 + 3x^2 + 1 \text{ and } x^4 + x^2 + x + 1. \quad 5$$

Section—C

Note : Answer any **five** questions.

6. (a) Find all the group homomorphisms :

$$f : \mathbf{Z}_{10} \rightarrow \mathbf{Z}_{15}$$

For all such f , find $\ker f$. 5

- (b) Let F be a field and let $\alpha \in F$. Define a function on $\phi : F[x] \rightarrow F$ by $\phi(f(x)) = f(\alpha)$. Check that ϕ is an onto ring homomorphism. Find a generator for $\ker \phi$. 5

7. (a) Let $f : \mathbf{Z}_{15} \rightarrow \mathbf{Z}_5$ be defined by $f(n \pmod{15}) = n \pmod{5}$. Check that f is a ring homomorphism. Find the kernel of f .

7

- (b) Write $\alpha = (1, 2, 5)$ and $\beta = (2, 3, 5)$ in S_5 in two line format. Is $(\alpha \circ \beta)$ a cycle ? Is $\alpha^2 = \alpha \circ \alpha$ a cycle ? 3

8. (a) Find $(39, 24)$. Also find $m, n \in \mathbf{Z}$ such that $m(39) + n(24) = (39, 24)$. 6

- (b) Check whether $\{I, (1, 3) (2, 4)\}$ is a normal subgroup in S_4 or not. 4
9. (a) Find the centre of the ring $M_2(\mathbf{R})$. Is it an ideal of $M_2(\mathbf{R})$? Justify your answer. 7
- (b) Define a zero divisor in a ring. List the zero divisors, if any, in the ring \mathbf{Z}_8 and \mathbf{Z}_{11} . 3
10. (a) Let G be a finite group and $n \in \mathbf{N}$. If $n \mid o(G)$ does it follow that G has a subgroup of order n ? Justify your answer. 7
- (b) Let $R = \mathbf{Z}_6$ and let I be the ideal $\{\bar{0}, \bar{3}\}$. Construct the Cayley table for multiplication in R/I . 3
11. (a) Show that the group $GL_2(\mathbf{R})/SL_2(\mathbf{R})$ is an infinite group. Also, show that any element of finite order in the group has order 1 or 2. 7
- (b) If $f : R \rightarrow S$ is an onto homomorphism of rings and I is an ideal of R , show that $f(I)$ is an ideal of S . 3

BMTC-134

कला स्नातक/विज्ञान स्नातक

(बी. ए. जी./बी. एस. सी. जी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2022

बी. एम. टी. सी.-134 : बीजगणित

समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : 100

नोट : (i) इस प्रश्न-पत्र में तीन भाग हैं— भाग 'क', भाग 'ख' और भाग 'ग' ।

(ii) भाग 'क' और भाग 'ख' के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(iii) भाग 'ग' से किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(iv) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

भाग—क

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि, एक लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण जो भी उपयुक्त हो, के रूप में कीजिए :

$$1 \times 10 = 10$$

- (i) $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ पर आव्यूह गुणन एक द्वि-आधारी संक्रिया है।
- (ii) प्रत्येक विषम कोटि का क्रमचय विषम चक्र होता है।
- (iii) यदि एक वलय क्रमविनिमेय नहीं है, तो उसके उपवलय भी क्रमविनिमेय नहीं हैं।
- (iv) किसी भी क्रमविनिमेय तत्समकी वलय को एक क्षेत्र में अंतःस्थापित किया जा सकता है।
- (v) दो-चक्रों का समुच्चय संयोजन के सापेक्ष एक समूह बनता है।
- (vi) सममित समूह S_3 उपसमूह $H = \langle (1, 2) \rangle$ और $K = \langle (1, 2, 3) \rangle$ का अनुलोम गुणनफल है।
- (vii) यदि एक वलय में परिमित संख्या में गुणजावलियाँ हैं, तो वलय परिमित वलय है।
- (viii) कोई भी वलय में एक मात्रक शून्य का भाजक नहीं हो सकता है।

- (ix) ' $a \sim b$ यदि a, b को विभाज्य करता हो या b, a को विभाज्य करता हो' द्वारा परिभाषित संबंध एक तुल्यता संबंध है।
- (x) यदि R एक तत्समकी वलय है और R' वलय R की तत्समकी उपवलय है, तो इन वलयों के तत्समक अवयव समान होते हैं।

भाग—ख

2. (क) जाँच कीजिए कि :

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

वलय $M_2(\mathbf{R})$ की उपवलय है या नहीं। क्या इसका तत्समक अवयव है ? क्या यह क्रम-विनिमेय है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5

- (ख) मान लीजिए कि G एक समूह है और H और K इसके उपसमूह हैं। HK G का उपसमूह होने के लिए एक आवश्यक और पर्याप्त निकर्ष बताइए। यह दिखाइए कि यदि H या K में एक उपसमूह प्रसामान्य है, तो HK समूह G का एक उपसमूह है। 5

3. (क) Z_{15} के सभी उपसमूह ज्ञात कीजिए। Z_{15} के उपसमूहों का एक उपसमूह आरेख बनाइए। 5

(ख) सिद्ध कीजिए कि : 5

$$\frac{5Z}{15Z} \square Z_3$$

4. (क) $p = 2$ के लिए $\text{mod } p$ अखण्डनीय परीक्षण का प्रयोग करके जाँच कीजिए कि बहुपद $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ अखण्डनीय है या नहीं। 7

(ख) मान लीजिए कि $X = N$ है। जाँच कीजिए कि $I = \{A \subseteq X \mid A \text{ एक परिमित समष्टि है}\}$ वलय $P(X, \Delta, \cap)$ में एक गुणजावली है या नहीं। 3

5. (क) समूह :

$$Q_8 = \left\{ \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \right\}$$

लीजिए, जहाँ $i = \sqrt{-1}$ है। $\frac{Q_8}{H}$ के अवयव

निकालिए, जहाँ $H = \left\{ \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ है। $\frac{Q_8}{H}$ में

प्रत्येक अवयव की कोटि भी ज्ञात कीजिए। 5

(ख) बहुपदों $x^3 + 3x^2 + 1$ और $x^4 + x^2 + x + 1$ का महत्तम सार्व भागक निकालिए। 5

भाग—ग

नोट : किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

6. (क) सभी समूह समाकारिताएँ $f : \mathbf{Z}_{10} \rightarrow \mathbf{Z}_{15}$ निकालिए। प्रत्येक समाकारिता f के लिए $\ker f$ निकालिए। 5

(ख) मान लीजिए F एक क्षेत्र है और $a \in F$ है। फलन $\phi : F(x) \rightarrow F$ को $\phi(f(x)) = f(a)$ द्वारा परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि ϕ एक आच्छादक वलय समाकारिता है। $\ker \phi$ के लिए एक जनक ज्ञात कीजिए। 5

7. (क) मान लीजिए :

$$f : \mathbf{Z}_{10} \rightarrow \mathbf{Z}_5$$

$$f(n \pmod{15}) = n \pmod{5}$$

द्वारा परिभाषित है। जाँच कीजिए कि f एक वलय समाकारिता है। समाकारिता f की अष्टि ज्ञात कीजिए। 7

(ख) क्रमचय $\alpha = (1, 2, 5)$, $\beta = (2, 3, 5)$ को दो-पंक्ति रूप में लिखिए। क्या $(\alpha \circ \beta)$ एक चक्र है। क्या $\alpha^2 = \alpha \circ \alpha$ एक चक्र है ? 3

8. (क) $(39, 24)$ ज्ञात कीजिए। $m, n \in \mathbf{Z}$ भी ज्ञात कीजिए कि जिससे 6

$$m(39) + n(24) = (39, 24)।$$

- (ख) जाँच कीजिए कि $\{I, (1, 3) (2, 4)\}$ S_4 का प्रसामान्य उपसमूह है या नहीं। 4

9. (क) वलय $M_2(\mathbf{R})$ का केन्द्र ज्ञात कीजिए। क्या यह $M_2(\mathbf{R})$ की गुणजावली है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 7

- (ख) एक वलय में शून्य का भाजक परिभाषित कीजिए। यदि वलय \mathbf{Z}_8 एवं \mathbf{Z}_{11} में शून्य के भाजक हैं, तो उनकी सूची बनाइए। 3

10. (क) मान लीजिए कि G एक परिमित समूह है और $n \in \mathbf{N}$ है। यदि $n \mid o(G)$ तो क्या हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि G के एक कोटि n वाला एक उपसमूह है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 7

(ख) मान लीजिए कि $R = \mathbf{Z}_6$ और I गुणजावली $\{\bar{0}, \bar{3}\}$ है। R/I में गुणन के लिए कौली सारणियों की रचना कीजिए। 3

11. (क) दिखाइए कि समूह $GL_2(\mathbf{R})/SL_2(\mathbf{R})$ एक अनंत समूह है। यह भी दिखाइए कि समूह की परिमित कोटि वाले अवयव की कोटि 1 या 2 है। 7

(ख) यदि $f : R \rightarrow S$ एक आच्छादक वलय समाकारिता है और I, R की गुणजावली है, तो दिखाइए कि $f(I)$ वलय S की गुणजावली है। 3