

No. of Printed Pages : 11

**BMTC-133**

**BACHELOR OF SCIENCE (GENERAL)/  
BACHELOR OF ARTS (GENERAL)  
(BSCG/BAG)**

**Term-End Examination**

**December, 2022**

**BMTC-133 : REAL ANALYSIS**

*Time : 3 Hours*

*Maximum Marks : 100*

---

**Note :** (i) *Question 1 is compulsory.*

(ii) *Do any **six** questions from Question Nos. 2 to 8.*

(iii) *Use of calculator is not allowed.*

---

---

1. Which of the following statements are true or false ? Give reasons for your answers in the form of a short proof or counter-example, whichever is appropriate :  $2 \times 5 = 10$

(a) The set  $]-6, 8[ \cap ]-8, 6[$  is a neighbourhood of  $-5$ .

(b) The negation of  $p \rightarrow q$  is  $p \wedge q$ .

**P. T. O.**

- (c) The sequence  $\left(\frac{n^2 + 3}{n^2 + 1}\right)_{n \in \mathbf{N}}$  is increasing.
- (d) The function  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  defined by  $f(x) = [x]$  is differentiable in  $[1, 3]$ , where  $[x]$  denotes the greatest integer function.
- (e) The function  $f$  defined by  $f(x) = |x - 2|, x \in \mathbf{R}$  has a local maxima.
2. (a) Show that the function  $f$  given by :

$$f(x) = |x + 2| + 3x^2 - 4x + 5$$

is continuous but not derivable at the point  $x = -2$ . 5

- (b) Check whether the sequence  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  with the  $n$ th terms given below, are convergent or not : 5

(i)  $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$

(ii)  $a_n = \frac{1}{2^n}$

- (c) Prove that  $\sqrt{p}$  is irrational for any prime number  $p$ . State whether the method of proof is direct or indirect. Justify your answer. 5

3. (a) Examine the function :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x + 5x^2}{6x}, & \text{when } x \neq 0 \\ \frac{1}{3}, & \text{when } x = 0 \end{cases}$$

for the continuity at  $x = 0$ . If not continuous, describe the nature of discontinuity. 5

- (b) Test the following series for convergent : 5

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n - 2}{5^n}$

(ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

- (c) Find the local maximum and local minimum points of the function :

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$$

in the interval  $[0, 7]$ . 5

4. (a) Find the pointwise limit of the sequence  $\{f_n\}$ , where :

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}, \quad x \in [3, \infty]$$

Does this sequence converge uniformly ?

Justify your answer. 7

- (b) Show that  $f(x) = 2x$  is Riemann integrable on  $[0, 1]$  and find the value of the integral. 6
- (c) Check whether the set  $\left\{ \frac{1}{5^n} : n \in \mathbf{Z} \right\}$  is bounded or not. 2
5. (a) Show that : 7
- $$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x, \quad \forall x > 0$$
- (b) Show that the set of rational numbers is countable. 5
- (c) Check the validity of the argument : 3
- $$p \wedge q \Rightarrow \sim p$$
6. (a) Prove that every monotonically increasing bounded sequence is convergent. 5
- (b) Find the Maclaurin's series for  $e^{2x}, x \in \mathbf{R}$ . 7
- (c) Write the contraposition of the statement "if  $x, y \in \mathbf{Z}$  are such that either  $x$  or  $y$  is even, then  $xy$  is even" and prove the contraposition statement. 3

7. (a) State Bolzano-Weierstrass theorem. Use it to check whether the set :

$$S = \left\{ \frac{1}{m} - \frac{1}{n} : m, n \in \mathbf{N} \right\}$$

has a limit point. 5

- (b) Using the principle of induction, prove that 64 is a factor of a  $3^{2n+2} - 8n - 9$ ,  $n \in \mathbf{N}$ . 5

- (c) Find the radius of convergence of the power series  $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ . 5

8. (a) State and prove Lagrange's mean value theorem. Verify the theorem for the function  $f(x) = x^2 + 2x$  in  $[0, 2]$ . 7

- (b) Let  $f$  be the function defined by  $f(x) = x^2 + 3$ . Check whether  $f$  is uniformly continuous on  $[-5, 5]$ . 5

- (c) Check whether the set of irrationals is a closed set in  $\mathbf{R}$ . 3

**BMTC-133**

बी. एस-सी. ( सामान्य )/बी. ए. ( सामान्य )

( बी. एस-सी. जी./ बी. ए. जी. )

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2022

बी. एम. टी. सी.-133 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : 100

---

नोट : (i) प्रश्न 1 अनिवार्य है।

(ii) प्रश्न सं 2 से 8 तक किन्हीं छः प्रश्नों के उत्तर

दीजिए।

(iii) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

---

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य ? लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण जो भी उचित हो, के साथ अपने उत्तरों के कारण बताइए :

$$2 \times 5 = 10$$

- (i) समुच्चय  $] - 6, 8[ \cap ] - 8, 6[ - 5$  का एक प्रतिवेश है।
- (ii)  $p \rightarrow q$  का निषेध  $p \wedge q$  है।
- (iii) अनुक्रम  $\left( \frac{n^2 + 3}{n^2 + 1} \right)_{n \in \mathbf{N}}$  वर्धमान है।
- (iv)  $f(x) = [x]$  द्वारा परिभाषित फलन  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $[1, 3]$  में अवकलनीय है, जहाँ  $[x]$  महत्तम पूर्णांक फलन को निरूपित करता है।
- (v)  $f(x) = |x - 2|$ ,  $x \in \mathbf{R}$  द्वारा परिभाषित फलन  $f$  का स्थानीय उच्चिष्ठ होता है।

2. (क) दिखाइए कि :

$$f(x) = |x + 2| + 3x^2 - 4x + 5$$

द्वारा दिया गया फलन  $f$  संतत है परन्तु बिन्दु  $x = -2$  पर अवकलनीय नहीं है। 5

(ख) जाँच कीजिए कि अनुक्रम  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  जिनके  $n$ वें पद नीचे दिए गए हैं, अभिसारी हैं या नहीं : 5

$$(i) a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$(ii) a_n = \frac{1}{2^n}$$

(ग) सिद्ध कीजिए कि किसी भी अभाज्य संख्या  $p$  के लिए  $\sqrt{p}$  अपरिमेय है। बताइए कि उपपत्ति की विधि प्रत्यक्ष है या परोक्ष। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

5

3. (क)  $x = 0$  पर सांतत्य के लिए निम्नलिखित फलन की जाँच कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x + 5x^2}{6x}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{3}, & x = 0 \end{cases}$$

यदि यह संतत नहीं है, तो असांतत्यता के स्वरूप का वर्णन कीजिए।

5

(ख) निम्नलिखित श्रेणियों के अभिसरण की जाँच कीजिए :

5

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{5^n}$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

(ग) अंतराल  $[0, 7]$  में फलन  $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$  के स्थानीय उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ बिन्दु ज्ञात कीजिए।

5

4. (क) अनुक्रम  $\{f_n\}$  की बिंदुशः सीमा ज्ञात कीजिए,

$$\text{जहाँ } f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}, x \in [3, \infty]। \text{ क्या यह}$$

अनुक्रम एकसमानतः अभिसारित होता है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 7

- (ख) दिखाइए कि  $f(x) = 2x$ ,  $[0, 1]$  पर रीमान समाकलनीय है और समाकलन का मान ज्ञात कीजिए। 6

- (ग) जाँच कीजिए कि समुच्चय  $\left\{ \frac{1}{5^n} : n \in \mathbf{Z} \right\}$  परिबद्ध है या नहीं। 2

5. (क) दिखाइए कि : 7

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x, \quad \forall x > 0$$

- (ख) दिखाइए कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय गणनीय होता है। 5
- (ग) तर्क  $p \wedge q \Rightarrow \sim p$  की वैधता की जाँच कीजिए। 3

6. (क) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक एकदिष्टतः वर्धमान परिबद्ध अनुक्रम अभिसारी होता है। 5

- (ख)  $e^{2x}, x \in \mathbf{R}$  के लिए मैक्लॉरिन श्रेणी ज्ञात कीजिए। 7
- (ग) “यदि  $x, y \in \mathbf{Z}$  ऐसे हैं जिनके  $x$  या  $y$  सम हैं, तब  $xy$  सम होगा।” इस कथन का प्रतिधनात्मक लिखिए और प्रतिधनात्मक कथन को सिद्ध कीजिए। 3
7. (क) बुल्ज़ानो-वीयरस्ट्रास प्रमेय का कथन दीजिए। प्रमेय द्वारा जाँच कीजिए कि समुच्चय  $S = \left\{ \frac{1}{m} - \frac{1}{n} : m, n \in \mathbf{N} \right\}$  का सीमा बिन्दु होता है या नहीं। 5
- (ख) आगमन नियम द्वारा सिद्ध कीजिए कि  $64, 3^{2n+2} - 8n - 9, n \in \mathbf{N}$  का गुणक है। 5
- (ग) घात श्रेणी  $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$  की अभिसरण त्रिज्या ज्ञात कीजिए। 5
8. (क) लैग्रान्ज माध्यमान प्रमेय का कथन दीजिए और सिद्ध कीजिए।  $[0, 2]$  में फलन  $f(x) = x^2 + 2x$  के लिए प्रमेय को सत्यापित कीजिए। 7

- (ख) मान लीजिए कि  $f$ ,  $f(x) = x^2 + 3$  द्वारा परिभाषित फलन है। जाँच कीजिए कि  $f$ ,  $[-5, 5]$  पर एकसमानतः संतत है। 5
- (ग) जाँच कीजिए कि क्या अपरिमेयों का समुच्चय,  $\mathbf{R}$  में संवृत समुच्चय है। 3