No. of Printed Pages : 12

PHE-14

BACHELOR OF SCIENCE (B. SC.)

Term-End Examination

December, 2021

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS—III

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : (*i*) *Attempt* ***all*** *questions.*

(*ii*) *The marks for each question are indicated against it.*

(*iii*) *Symbols have their usual meanings.*

1. Attempt any ***five*** parts : 5×2=10

(a) Verify that the matrix $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ is orthogonal.

(b) Define contravariant and covariant tensors of rank 2.

(c) Show that the function $f(z) = z^3$ is analytic in the entire z-plane.

(d) Locate the singularities of the function $f(z) = \frac{\ln (z + 2i)}{z^2}$.

(e) Obtain the Fourier transform of the function :

$$f(x) = \begin{cases} c, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

where c is a constant.

(f) Determine the Laplace transform of the function $f(t) = e^{-qt}$.

(g) Using the generating function for Legendre polynomials :

$$g(x,t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n$$

show that $P_n(1) = 1$ for $x = 1$.

(h) Write the orthonormality condition for Laguerre polynomials.

2. Attempt any ***two*** parts : 2×5=10

(a) Using Cayley-Hamilton theorem, find the inverse of the matrix A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Show that every eigen value of a unitary matrix is of unit modulus.

(c) Consider a set of all complex numbers of unit magnitude $U(1) = \{z : |z| = 1\}$. Show that this set satisfies the four properties of a group.

3. Attempt any ***two*** parts : 2×5=10

(a) Evaluate the following integral :

$$\oint \frac{4 - 3z}{z(z-1)(z-2)} dz$$

using Cauchy integral formula, where C is a circle $|z| = \frac{3}{2}$.

(b) Using Cauchy's residue theorem, evaluate the integral $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}$.

(c) Obtain the Laurent series expansion of the function $\frac{e^z}{(z-1)^2}$ about $z = 1$.

4. Attempt any ***two*** parts : 2×5=10

(a) Obtain the Fourier sine transform of the function :

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(b) Obtain the inverse Laplace transform of the function :

$$F(s) = \frac{3s + 5}{s^2 + 3s + 2}$$

(c) Use the Laplace transform to solve the initial value problem :

$$y'' + 2y' - 8y = 0$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 8.$$

5. Attempt any *one* part :

(a) Use the generating function for Hermite polynomials given by :

$$g(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{H}_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

to obtain Rodrigue's formula for the Hermite polynomials. Also, using this formula, show that : 8+2

$$\mathrm{H}_3(x) = 4xe^{-x^2}\left[3 - 2x^2\right]$$

(b) Using the Bessel function of the first kind and of order m :

$$\mathrm{J}_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

establish the relation :

$$\mathrm{J}_{m-1}(x) + \mathrm{J}_{m+1}(x) = 2\frac{m}{x}\mathrm{J}_m(x)$$

Also plot Bessel functions of the first kind and orders 0 and 1. 8+2

PHE-14

विज्ञान स्नातक (बी. एस-सी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर. 2021

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ—III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : (*i*) *सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।*

(*ii*) *प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं।*

(*iii*) *प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।*

---

1. कोई **पाँच** भाग हल कीजिए : $5 \times 2 = 10$

(क) सत्यापित कीजिए कि आव्यह

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$ लाम्बिक है।

(ख) कोटि दो वाले प्रतिपरिवर्ती और सहपरिवर्ती टेन्सरों की परिभाषा लिखिए।

(ग) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(z) = z^3$ परे z-समतल में विश्लेषिक है।

(घ) फलन $f(z) = \frac{\ln(z + 2i)}{z^2}$ की विचित्रताओं का निर्धारण कीजिए।

(ङ) निम्नलिखित फलन का फरिये रूपांतर परिकलित कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} c, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

जहाँ c अचर है।

(च) फलन $f(t) = e^{-qt}$ का लाप्लास रूपांतर ज्ञात कीजिए।

(छ) लेजेन्ड्रे बहपदों के जनक फलन :

$$g(x,t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n$$

का उपयोग कर सिद्ध कीजिए कि $x = 1$ के लिए $P_n(1) = 1$ है।

(ज) लागेर बहपदों के लिए प्रसामान्य लाम्बिकता संबंध लिखिए।

2. कोई **दो** भाग हल कीजिए : $2 \times 5 = 10$

(क) कैले-हैमिल्टन प्रमेय का उपयोग कर आव्यह A का व्यत्क्रम परिकलित कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि ऐकिक आव्यह का प्रत्येक आइगेन मान एकक मापांक वाला होता है।

(ग) एकक परिमाण वाली सभी सम्मिश्र संख्याओं के समच्चय $U(1) = \{z : |z| = 1\}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि यह समच्चय समह के चार गणधर्मों को संतष्ट करता है।

3. कोई **दो** भाग हल कीजिए : $2 \times 5 = 10$

(क) कौशी समाकल सत्र का उपयोग कर निम्नलिखित समाकल की गणना कीजिए. जहाँ C, $|z| = \frac{3}{2}$ का एक वत्त है :

$$\oint \frac{4 - 3z}{z(z-1)(z-2)} dz$$

(ख) कौशी अवशिष्ट प्रमेय का उपयोग कर समाकल $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}$ को परिकलित कीजिए।

(ग) $z = 1$ के प्रति फलन $\frac{e^z}{(z-1)^2}$ का लौराँ श्रेणी प्रसार प्राप्त कीजिए।

4. कोई **दो** भाग हल कीजिए : $2 \times 5 = 10$

(क) निम्नलिखित फलन का फरिये साइन रूपांतर प्राप्त कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 \ , & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(ख) फलन $F(s) = \frac{3s + 5}{s^2 + 3s + 2}$ का व्यत्क्रम लाप्लास रूपांतर परिकलित कीजिए।

(ग) लाप्लास रूपांतर का प्रयोग कर आदि मान समस्या :

$$y'' + 2y' - 8y = 0$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 8$$

को हल कीजिए।

5. कोई **एक** भाग हल कीजिए :

(क) हर्मिट बहपदों के जनक फलन :

$$g(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{H}_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

का उपयोग कर हर्मिट बहपदों का रोड्रिगेज सत्र प्राप्त कीजिए और इस सत्र की सहायता से सिद्ध कीजिए कि $\mathrm{H}_3(x) = 4xe^{-x^2}\left[3 - 2x^2\right]$ है।

8+2

(ख) कोटि m वाले प्रथम प्रकार के बेसल फलन :

$$\mathrm{J}_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

का उपयोग कर निम्नलिखित संबंध को स्थापित कीजिए :

$$\mathrm{J}_{m-1}(x) + \mathrm{J}_{m+1}(x) = 2\frac{m}{x}\mathrm{J}_m(x)$$

शून्य और प्रथम कोटियों वाले प्रथम प्रकार के बेसल फलनों के आरेख खींचिए। 8+2