

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)****Term-End Examination****December, 2021****ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS****MTE-08 : DIFFERENTIAL EQUATIONS***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50**(Weightage : 70%)*

Note : Question no. 1 is **compulsory**. Attempt any **four** questions from the remaining questions no. 2 to 7. Use of calculators is **not** allowed.

1. State whether the following statements are *true* or *false*. Justify your answer with the help of a short proof or a counter-example. $5 \times 2 = 10$

(a) The solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = y \text{ with } y(0) = 0$$

exists but is not unique.

(b) The form of trial solution of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = x^2 e^{-x} \cos 5x$$

is $y = (A_0x^2 + A_1x + A_2) e^{-x} \cos 5x$.

- (c) For the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0,$$

one integral included in C.F. is

$$e^{-x} \text{ if } 1 - P(x) + Q(x) = 0.$$

- (d) The homogeneous Pfaffian differential equation

$$z(z - y) dx + z(z + x) dy + x(x + y) dz = 0$$

is integrable.

- (e) The partial differential equation

$$y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

is elliptic if $xy < 1$.

2. (a) Use the method of variation of parameters to solve the following differential equation : 5

$$y'' - y = \frac{2}{1 + e^x}$$

- (b) Solve : 5

$$(D^2 - D'^2 - 3D + 3D')z = xy + e^{(x+2y)}$$

3. (a) A certain population is growing at a rate given by the equation

$$\frac{dx}{dt} = x(a - bx), \text{ a, b being positive constants.}$$

Show that the maximum rate of growth occurs when the population is equal to half the equilibrium size, i.e., when the population is $\frac{a}{2b}$. 4

(b) Solve the simultaneous equation

$$\frac{x dx}{z^2 - 2yz - y^2} = \frac{dy}{y + z} = \frac{dz}{y - z}. \quad 3$$

(c) Solve the equation

$$(x^2 + y^2 + x) dx + (xy) dy = 0. \quad 3$$

4. (a) Solve the equation by changing the independent variable : 5

$$y'' - 2 \tan x y' + 5y = 0$$

(b) Find the integral surface of the linear partial differential equation :

$$x(x^2 + z)p - y(x^2 + z)q = (x^2 - y^2)z,$$

which contains the straight line

$$x + y = 0, z = 1. \quad 5$$

5. (a) Using the method of undetermined coefficients, solve the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = x + e^{2x}. \quad 3$$

(b) Solve the differential equation

$$x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x. \quad 3$$

(c) Solve : 4

$$(x^2 D^2 - xD + 2)y = x \ln x$$

6. (a) Using Charpit's method find the complete integral of partial differential equation $px + qy + pq = 0$. 4

(b) Solve the p.d.e. of the following : 6

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \ln x$$

7. (a) Solve the wave equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < \pi$$

under the following conditions :

$u = 0$ when $x = 0$ and $x = \pi$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ when } t = 0 \text{ and } u(x, 0) = x \quad \forall x. \quad 6$$

(b) Solve :

$$xp^3 = a + bp$$

where a and b are constants. 4

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2021

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-08 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट : प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। शेष प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटरो के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। संक्षिप्त उपपत्ति अथवा प्रत्युदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

5×2=10

(क) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = y$, जहाँ $y(0) = 0$, के हल का अस्तित्व है, किन्तु इसका हल अद्वितीय नहीं है।

(ख) अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = x^2 e^{-x} \cos 5x$$

के जाँच हल का रूप

$$y = (A_0x^2 + A_1x + A_2) e^{-x} \cos 5x \text{ है।}$$

(ग) अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x) y = 0$$

के पूरक फलन में शामिल एक समाकल e^{-x} होगा

यदि $1 - P(x) + Q(x) = 0$.

(घ) समघात फैफियन अवकल समीकरण

$$z(z - y) dx + z(z + x) dy + x(x + y) dz = 0$$

समाकलनीय है ।

(ङ) आंशिक अवकल समीकरण

$$y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

दीर्घवृत्तीय है, यदि $xy < 1$.

2. (क) प्राचल विचरण विधि से निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए :

5

$$y'' - y = \frac{2}{1 + e^x}$$

(ख) हल कीजिए :

5

$$(D^2 - D'^2 - 3D + 3D') z = xy + e^{(x+2y)}$$

3. (क) एक समष्टि की वृद्धि दर निम्नलिखित समीकरण द्वारा दी गई है :

$$\frac{dx}{dt} = x(a - bx), \quad a, b \text{ धनात्मक अचर हैं ।}$$

दिखाइए वृद्धि की दर तब अधिकतम होती है जब

समष्टि संतुलन आमाप की आधी होती है, अर्थात् जब

समष्टि $\frac{a}{2b}$ होती है ।

4

(ख) युगपत समीकरण को हल कीजिए : 3

$$\frac{x dx}{z^2 - 2yz - y^2} = \frac{dy}{y + z} = \frac{dz}{y - z}$$

(ग) समीकरण हल कीजिए : 3

$$(x^2 + y^2 + x) dx + (xy) dy = 0$$

4. (क) स्वतंत्र चर परिवर्तन द्वारा समीकरण को हल कीजिए : 5

$$y'' - 2 \tan x y' + 5y = 0$$

(ख) रैखिक आंशिक अवकल समीकरण :

$$x(y^2 + z) p - y(x^2 + z) q = (x^2 - y^2) z$$

का समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिए, जिसमें सरल रेखा

$x + y = 0$, $z = 1$ आविष्ट हो । 5

5. (क) अनिर्धारित गुणांक विधि से अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = x + e^{2x}$$

को हल कीजिए । 3

(ख) अवकल समीकरण को हल कीजिए : 3

$$x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x$$

(ग) हल कीजिए : 4

$$(x^2 D^2 - xD + 2) y = x \ln x$$

6. (क) चार्पिट विधि से आंशिक अवकल समीकरण

$$px + qy + pq = 0 \text{ का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए ।} \quad 4$$

(ख) निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \ln x \quad 6$$

7. (क) निम्नलिखित प्रतिबंधों के अधीन तरंग समीकरण

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi \text{ को हल कीजिए :}$$

$$u = 0 \text{ जब } x = 0 \text{ और } x = \pi.$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ जब } t = 0 \text{ और } u(x, 0) = x \quad \forall x. \quad 6$$

(ख) $x^p = a + bp$ को हल कीजिए जहाँ a और b अचर हैं ।

4