

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

**Term-End Examination
December, 2021**

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING**

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage : 70%)

Note : Attempt any **five** questions. All questions carry equal marks. Use of calculators is **not** allowed. Symbols have their usual meanings.

1. (a) Two firms X and Y produce the same commodity. Due to the production constraints, each firm is able to produce packages of 1, 3 and 5 units of the product. The cost of producing q_x units for firm X is ₹ $[6 + q_x^2 - 2q_x + 5]$, and firm Y has the identical cost function ₹ $[6 + q_y^2 - 2q_y + 5]$ for producing q_y units. p is the price of one unit for firm X. We assume that the market is in equilibrium. The outcomes are the profits of the firm shown in the form of a matrix $A = [a_{ij}]$ (pay-off matrix). Write (i) a_{11} , (ii) a_{22} , (iii) a_{21} , if the demand function $D(p)$ is given by $D(p) = 50 - p$.

6

- (b) Assume that the Moon is at a distance of 3,00,000 km from the Earth, and that it takes 28 days for it to orbit the Earth once. Geostationary satellites are those which are at a rest relative to the Earth. Using these two facts, derive the altitude of the geostationary satellite from the centre of the Earth.

4

2. (a) Consider the following system of differential equations, representing a prey and predator population model :

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - y, \quad \frac{dy}{dt} = x + y$$

- (i) Identify all the real critical points of the system of equations given above.
- (ii) Obtain the type and stability of these critical points.

7

- (b) Suppose you are a member of the Planning Committee of a country for mitigating natural disasters like fire, cyclone, flood, drought, etc. List four essentials and two non-essentials for planning the operations.

3

3. (a) A particle of mass m is thrown vertically upward with velocity v_0 . The air resistance is $mgcv^2$, where c is a constant and v is the velocity at any time t . Show that the time taken by the particle to reach the highest point is given by $v_0 \sqrt{c} = \tan [gt \sqrt{c}]$.

6

(b) Consider the arterial blood viscosity, $\mu = 0.025$ poise. If the length of the artery is 1.5 cm, radius 8×10^{-3} cm and $P = P_1 - P_2 = 4 \times 10^3$ dyne/cm², then find :

(i) the maximum peak velocity of blood;
and

(ii) the shear stress at the wall.

4

4. (a) Consider the diffusion of oxygen through a membrane $0 \leq x \leq h$ of thickness h , the two ends of which are maintained at concentrations C_1 and C_2 , respectively. If the initial concentration is zero, model this problem using a one-dimensional diffusion equation, and find the rate at which the diffusing oxygen emerges at the interface $x = 0$, for unit area per unit time.

6

(b) Characterise the following as deterministic or stochastic, giving reasons for your answers :

4

- (i) Blood flow in arteries
- (ii) Arrival of customers at a supermarket
- (iii) The Indian team winning a cricket match
- (iv) Movements of planets

5. (a) The process of plucking a guitar string results in the frequency of vibrations being a function of the Young's modulus, the length and the density of the string. Use dimensional analysis to derive an expression for the frequency of vibrations of the string.

5

(b) The mean arrival rate to a service centre is 3 per hour. The mean service time is found to be 10 minutes for service. Assuming Poisson arrival and exponential service time, find :

- (i) the utilisation factor for this service facility;
- (ii) the probability of two units in the system;
- (iii) the expected number of units in the system; and
- (iv) the expected time, in hours, that a customer has to spend in the system.

5

6. (a) Find the terminal velocity and time taken by a raindrop of radius 0.8 cm to reach the ground if it starts its descent in a cloud 35000 m high. 3
- (b) Find the output yielding maximum profit for the cost function $C = 0.7x^3 - 0.8x^2 + 12x + 9$, given that the cost price of x is ₹ 45 per unit. 3
- (c) A drug is induced in a patient's bloodstream at a constant rate r gm/s. Simultaneously, the drug is removed at a rate proportional to the amount $x(t)$ of the drug present at any time t . Determine the differential equation governing the amount $x(t)$. If the initial concentration of the drug in the bloodstream is x_0 , find the concentration of the drug at any time t . 4
7. (a) If a simple pendulum of length l oscillates through an angle α on either side of the mean position, then find the angular velocity, $\frac{d\theta}{dt}$, of the pendulum, where θ is the angle which the string makes with the vertical. 4

- (b) The return distribution of securities 1 and 2 is as follows :

Event (j)	1	2	3	4
Chance ($P_{1j} = P_{2j}$)	0.33	0.25	0.17	0.25
Return R_{1j}	19	17	11	10
Return R_{2j}	18	16	11	9

Find which security is more risky in Markowitz's sense.

6

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2021

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-14 : गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50
(कुल का : 70%)

नोट : किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं । कैल्कुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं ।

1. (क) दो फर्म X और Y एक ही उपभोक्ता वस्तु का उत्पादन करती हैं । उत्पादन व्यवरोधों के कारण, प्रत्येक फर्म 1, 3 और 5 इकाइयों के पैकेज निर्मित करने में समर्थ हो पाती है । फर्म X के लिए q_x इकाइयाँ निर्मित करने की लागत ₹ $[6 + q_x^2 - 2q_x + 5]$ है तथा फर्म Y के लिए q_y इकाइयाँ निर्मित करने का सर्वसम लागत फलन भी ₹ $[6 + q_y^2 - 2q_y + 5]$ है । फर्म X के लिए एक इकाई की कीमत p है । हम कल्पना करते हैं कि बाज़ार में संतुलन है । फर्मों के लाभों को एक आव्यूह $A = [a_{ij}]$ (भुगतान आव्यूह) के रूप में दर्शाया जाता है । यदि माँग फलन $D(p) = 50 - p$ हो, तो (i) a_{11} , (ii) a_{22} , (iii) a_{21} ज्ञात कीजिए ।

6

(ख) मान लीजिए कि चन्द्रमा पृथ्वी से 3,00,000 km की दूरी पर है तथा यह पृथ्वी के परितः एक परिभ्रमण 28 दिन में करता है। तुल्यकाली उपग्रह वे उपग्रह हैं जो पृथ्वी के सापेक्ष विश्राम में रहते हैं। इन दो तथ्यों का उपयोग करते हुए, पृथ्वी के केन्द्र से तुल्यकाली उपग्रह की ऊँचाई निगमित कीजिए।

4

2. (क) एक शिकार और परभक्षी समष्टि निदर्श को निरूपित करने वाला समीकरण निकाय निम्नलिखित है :

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - y, \quad \frac{dy}{dt} = x + y$$

(i) उपर्युक्त समीकरण निकाय के सभी वास्तविक क्रांतिक बिंदु प्राप्त कीजिए।

(ii) इन क्रांतिक बिंदुओं के प्रकार और स्थायित्व प्राप्त कीजिए।

7

(ख) मान लीजिए आप आग, चक्रवात, बाढ़, सूखा, आदि जैसी प्राकृतिक आपदाओं को कम करने के लिए बनी योजना समिति के सदस्य हैं। संचालन हेतु योजना के लिए आवश्यक चार अनिवार्य और दो गैर-अनिवार्य कार्यों को सूचीबद्ध कीजिए।

3

3. (क) द्रव्यमान m वाले एक कण को ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर वेग v_0 से फेंका जाता है। वायु प्रतिरोध $mgcv^2$ है, जहाँ c एक अचर है तथा v किसी समय t पर वेग है। दिखाइए कि उस कण को सबसे अधिक ऊँचे बिंदु तक पहुँचने में लगा समय $v_0\sqrt{c} = \tan [gt\sqrt{c}]$ से प्राप्त होगा।

6

- (ख) धमनी रक्त श्यानता $\mu = 0.025$ poise है। यदि धमनी की लंबाई 1.5 cm, त्रिज्या 8×10^{-3} cm तथा $P = P_1 - P_2 = 4 \times 10^3$ dyne/cm² हो, तो

(i) रक्त का अधिकतम शिखर वेग; तथा

(ii) दीवार पर अपरूपण प्रतिबल ज्ञात कीजिए।

4

4. (क) h मोटाई वाली एक झिल्ली $0 \leq x \leq h$ से होकर जाती हुई ऑक्सीजन के एक विसरण पर विचार कीजिए, जिसमें दोनों सिरों को क्रमशः सांद्रता C_1 और C_2 पर अनुरक्षित रखा जाता है। यदि प्रारंभिक सांद्रता शून्य है, तो एक-विमीय विसरण समीकरण का उपयोग करते हुए, इस समस्या का निदर्शन कीजिए तथा एकक क्षेत्रफल के लिए, अंतरापृष्ठ $x = 0$ पर प्रति इकाई समय विसरित ऑक्सीजन के निर्गत होने की दर ज्ञात कीजिए।

6

(ख) अपने उत्तर का कारण देते हुए निम्नलिखित को निर्धारणात्मक अथवा प्रसंभाव्य के रूप में अभिलक्षणीत कीजिए :

4

- (i) धमनियों में रक्त प्रवाह
- (ii) एक सुपर-बाज़ार में ग्राहकों का आगमन
- (iii) एक क्रिकेट मैच में भारतीय टीम का जीतना
- (iv) ग्रहों की गति

5. (क) एक गिटार के तार को झंकृत करने के प्रक्रम के परिणामस्वरूप कंपन की आवृत्ति यंग के गुणांक तथा तार की लंबाई और घनत्व के एक फलन के रूप में प्राप्त होती है। तार के कंपन की आवृत्ति का व्यंजक निगमित करने के लिए विमीय विश्लेषण का प्रयोग कीजिए।

5

(ख) किसी सेवा केंद्र पर माध्य आगमन दर 3 प्रति घंटा है। माध्य सेवा समय 10 मिनट प्रति सेवा है। प्वासों बंटित आगमन और चरघातांकीय सेवा काल मानते हुए, निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

- (i) सेवा सुविधा के लिए उपयोग गुणक;
- (ii) प्रणाली में दो इकाइयों की प्रायिकता;
- (iii) प्रणाली में इकाइयों की प्रत्याशित संख्या; तथा
- (iv) प्रणाली में एक ग्राहक द्वारा घंटों में व्यतीत किया गया प्रत्याशित काल।

5

6. (क) त्रिज्या 0.8 cm वाली एक वर्षा की बूँद का अंतिम वेग तथा उसके भूमि तक पहुँचने में लगने वाला समय ज्ञात कीजिए, यदि वह 35000 m ऊँचे एक बादल से नीचे गिरना प्रारंभ करती है । 3
- (ख) वह उत्पादन ज्ञात कीजिए जिससे लागत फलन $C = 0.7x^3 - 0.8x^2 + 12x + 9$ के लिए अधिकतम लाभ प्राप्त हो, जबकि दिया गया है कि x की लागत कीमत ₹ 45 प्रति इकाई है । 3
- (ग) कोई दवाई एक रोगी की रक्त धारा में r gm/s की अचर दर से प्रेरित की जा रही है । इसके साथ ही, यह दवाई किसी भी समय t पर उपस्थित दवाई की मात्रा $x(t)$ के समानुपाती दर से निकाली जा रही है । मात्रा $x(t)$ नियंत्रित करने वाली अवकल समीकरण निर्धारित कीजिए । यदि रक्त धारा में दवाई की प्रारंभिक सांद्रता x_0 है, तो इस दवाई की समय t पर सांद्रता ज्ञात कीजिए । 4
7. (क) यदि l लम्बाई का एक सरल लोलक माध्य स्थिति के दोनों ओर α कोण पर दोलायमान होता है, तो लोलक का कोणीय वेग $\frac{d\theta}{dt}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ θ वह कोण है जो डोरी ऊर्ध्वाधर के साथ बनाती है । 4

(ख) प्रतिभूतियों 1 और 2 का प्रतिफल बंटन इस प्रकार है :

घटना (j)	1	2	3	4
संयोग ($P_{1j} = P_{2j}$)	0.33	0.25	0.17	0.25
प्रतिफल R_{1j}	19	17	11	10
प्रतिफल R_{2j}	18	16	11	9

ज्ञात कीजिए कि मार्कोविट्ज़ के अनुसार कौन-सी प्रतिभूति ज्यादा जोखिम भरी है ।

6
