No. of Printed Pages : 16

# BMTC-131

## BACHELOR OF SCIENCE/BACHELOR OF ARTS [B. Sc. (G)/B. A. (G)]

## Term-End Examination

## Dec., 2021

### BMTC-131 : CALCULUS

*Time : 3 Hours* *Maximum Marks : 100*

**Note :** *(i) All questions/parts of the questions in Section A and Section B are compulsory.*

*(ii) Attempt any* ***five*** *questions from Section C.*

*(iii) Use of calculator is not allowed.*

### Section—A

1. Which of the following statements are true ? Give reasons for your answers in the form of a





short proof or a counter-example, whichever is appropriate : 20

(i) $x \oplus y = \sqrt{xy}$ defines a binary operation $\oplus$ on $\mathbf{R}$.

(ii) If $z = a + ib \in \mathbf{C}$ such that $\frac{b}{a} = 1$, then $z$ lies in the first quadrant of the plane.

(iii) No infinite subset of $\mathbf{R}$ has an upper bound.

(iv) If :

$$f : \mathbf{R} \to \{1\},$$

then $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$.

(v) For

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ and } g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},$$

$$(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) + (f \circ g')(x)$$

(vi) The domain of a derivable real-valued function $f$ need not be the same as the domain of $f'$.

(vii) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = 0.$

(viii) Every real function has a point of inflexion.

(ix) Every integrable function is differentiable.

(x) $\frac{d}{dt}\left[\int_{3t}^{t^2} x^{20} \sin\left(x^2\right) dx\right] = t^{40} \sin\left(t^4\right)$

## Section—B

2. (a) Let :

$$A = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x > \sqrt{7}\right\}$$

and $B = \left\{x \in Q \mid x < \sqrt{7}\right\}$.

Describe $A \cap B$ and $B \backslash A$ by the property method.

Also show $A \cup B$ in a Venn diagram with **R** as the universal set. 3





(b) Find the limit, as $x \to \pi$, if it exists, of

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : f(x) = \begin{cases} \pi - x, & x > \pi \\ e^x + \pi, & x \leq \pi \end{cases}.$$

Hence decide if $f$ is continuous on **R** or not. 3

(c) Find : 4

$$\int_{e^3}^{e^7} x^4 \cos(7 \ln x)\, dx$$

3. (a) Find all the fourth roots of $4i$, and represent them in an Argand diagram. 4

(b) Geometrically represent :

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : f(x) = \sin x + 0.5$$

Hence decide whether $f$ is $1 - 1$ or not. 3

(c) Obtain all the relative extrema of : 3

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : f(x) = \begin{cases} \left|x^2 - 5\right|, & 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{2}{x^2 + 5}, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

4. (a) Find the intervals of **R** on which $f$ is integrable, where $f$ is defined by : 3

$$f(x) = \frac{\sqrt{7}}{x^2 + 7} \forall\, x \in \mathbf{R}$$

(b) Express :

$$\frac{(2x+5)}{(x^3+x^2+3x+3)}$$

as a sum of partial fractions. 4

(c) Obtain the equation of the line that approximates the curve of $f$, defined by :

$$f(x) = 1 + \sinh(x^2) + x \;\forall\; x \in \mathbf{R},$$

as $x \to 0$. 3

## Section—C

5. (a) Express :

$$\cos 7\theta \text{ and } \sin 7\theta$$

in terms of powers of $\cos\theta$ and $\sin\theta$. Hence, express $\tan 7\theta$ in terms of power of $\tan\theta$. 5

(b) Check whether or not :

$$f : ]0, \infty[ \to \mathbf{R} : f(x) = \ln x$$

is continuous. 3

(c) Find the maximum possible domain of the function $f$, defined by $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2-2}}$. 2





6. (a) If the sum of two roots of :

$$2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$$

is zero, find all the roots of this equation. 7

(b) Alka gives Bela $x$ rupees on interest at the rate of $y$% per year. Assume that the interest is being continuously added annually and Bela has to pay the loan back after 20 years. What will be the amount she has to pay back ? 3

7. Trace the curve :

$$y^2(x-2) = x^2(x+2),$$

stating all the properties you have used for doing so. 10

8. (a) If :

$$I_n = \int \frac{\sin nx}{\sin x}\, dx,$$

check whether or not :

$$I_n = \frac{2\sin[(n-1)x]}{n-1} + I_{n-2} \;\forall\; n \geq 2.$$

If this equation is correct, use it to find $a$ and $b$, where :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\, dx = \begin{cases} a, & \text{if } n \text{ is even} \\ b, & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

If the equation relating $I_n$ and $I_{n-2}$, given above, is not correct, find $I_5 - I_2$. 6

(b) If $y = e^{m\left(\tan^{-1} x\right)}$, apply Leibniz's theorem to obtain an equation relating $y_{n+1}$ with $y_n$ and $y_{n-1}$, for $n \geq 1$. 4

9. (a) Find the larger of two areas into which $x^2 + y^2 = 64$ is divided by $y^2 = 12x$. 8

(b) Find : 2

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}, a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0$$

10. (a) Find the angle between the curves $x^2 - y^2 = 5$ and $x^2 + y^2 = 5\sqrt{2}$. 6





(b) Check whether or not the function :

$$f : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R} : f(x) = \sec\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$

satisfies the hypothesis of the inverse function theorem (IFT). If it does, what relation can be concluded ?

If $f$ does not satisfy the hypothesis of IFT, check whether or not it satisfies the hypotheses of the intermediate value theorem. 4

# BMTC-131

## स्नातक उपाधि कार्यक्रम

## [बी. एस-सी. ( जी )/ बी. ए. ( जी )]

## सत्रांत परीक्षा

## दिसम्बर. 2021

## बी.एम.टी.सी.-131 : कलन

*समय : 3 घण्टे* *अधिकतम अंक : 100*

**नोट :** *(i)* भाग 'अ' और भाग 'ब' के सभी प्रश्न/प्रश्नों के भाग **अनिवार्य** हैं।

*(ii)* भाग 'स' से कोई **पाँच** प्रश्न कीजिए।

*(iii)* कैलकलेटर का प्रयोग करने की अनमति नहीं है।





## भाग—अ

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन से कथन सत्य और कौन-से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर के पक्ष में एक संक्षिप्त उपपत्ति या प्रति-उदाहरण दीजिए : 20

(i) $x \oplus y = \sqrt{xy}, \mathbf{R}$ पर एक द्विआधारी संक्रिया $\oplus$ परिभाषित करता है।

(ii) यदि $z = a + ib \in \mathbf{C}$ इस प्रकार है कि $\frac{b}{a} = 1,$ तो $z$ समतल के पहले चतर्थांश में स्थित होगा।

(iii) $\mathbf{R}$ के किसी भी अपरिमित उपसमच्चय का उपरि परिबंध नहीं है।

(iv) यदि :

$$f : \mathbf{R} \to \{1\},$$

तो $\lim_{x \to 2} f(x) = 2.$

(v) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ और $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ के लिए :

$$(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) + (f \circ g')(x)$$

(vi) एक अवकलनीय वास्तविक मान फलन $f$ का प्रांत $f'$ के प्रांत के समान होना आवश्यक नहीं है।

(vii) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = 0$

(viii) प्रत्येक वास्तविक फलन का नतिपरिवर्तन बिन्द होता है।

(ix) प्रत्येक समाकलनीय फलन अवकलनीय होता है।

(x) $\frac{d}{dt}\left[\int_{3t}^{t^2} x^{20} \sin\left(x^2\right) dx\right] = t^{40} \sin\left(t^4\right)$

## भाग—ब

2. (क) मान लीजिए कि :

$$A = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x > \sqrt{7}\right\}$$

और $B = \left\{x \in \mathbf{Q} \mid x < \sqrt{7}\right\}$





हैं। गण-विधि से $A \cap B$ और $B \setminus A$ लिखिए। $\mathbf{R}$ को समष्टीय समच्चय के साथ $A \cup B$ को वेन आरेख में भी दर्शाइए। 3

(ख) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : f(x) = \begin{cases} \pi - x, & x > \pi \\ e^x + \pi, & x \leq \pi \end{cases}$

द्वारा परिभाषित फलन की $x \to \pi$ पर सीमा (यदि अस्तित्व है) को ज्ञात कीजिए।

इस प्रकार तय कीजिए कि $f, \mathbf{R}$ पर संतत है या नहीं। 3

(ग) $\int_{e^3}^{e^7} x^4 \cos(7 \ln x) dx$ ज्ञात कीजिए। 4

3. (क) $4i$ के सभी चौथे मल ज्ञात कीजिए और इन्हें आरगां आरेख पर भी दर्शाइए। 4

(ख) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : f(x) = \sin x + 0.5$ का ज्यामितीय निरूपण कीजिए। इस प्रकार तय कीजिए कि $f, 1-1$ है या नहीं। 3

(ग) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : f(x) = \begin{cases} |x^2 - 5|, & 0 \le x \le 3 \\ \dfrac{2}{x^2 + 5}, & \text{अन्यथा} \end{cases}$

के सभी सापेक्ष चरम मान ज्ञात कीजिए। 3

4. (क) $\mathbf{R}$ के वे सभी अंतराल ज्ञात कीजिए जिन पर $f$ समाकलनीय है: जहाँ $f(x) = \dfrac{\sqrt{7}}{x^2 + 7} \forall\, x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित फलन $f$ है। 3

(ख) $\dfrac{(2x + 5)}{(x^3 + x^2 + 3x + 3)}$ को आंशिक भिन्नों के योग में व्यक्त कीजिए। 4

(ग) $f(x) = 1 + \sinh(x^2) + x \forall\, x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित $f$ के वक्र का $x \to 0$ पर सन्निकटन करने वाली रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए। 3

## भाग—स

5. (क) $\cos 7\theta$ और $\sin 7\theta$ को $\cos\theta$ और $\sin\theta$ की घातों में व्यक्त कीजिए। इस प्रकार $\tan 7\theta$ को भी $\tan\theta$ की घातों के पदों में व्यक्त कीजिए। 5





(ख) जाँच कीजिए कि :

$$f : ]0, \infty[ \to \mathbf{R} : f(x) = \ln x$$

संतत है या नहीं। 3

(ग) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 - 2}}$ द्वारा परिभाषित फलन $f$ का अधिकतम संभव प्रांत ज्ञात कीजिए। 2

6. (क) यदि समीकरण :

$$2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$$

के दो मलों का योग शन्य है, तो इस समीकरण के सभी मल ज्ञात कीजिए। 7

(ख) अलका $y\%$ की वार्षिक दर से बेला को $x$ रुपये ब्याज पर देता है। मान लीजिए कि ब्याज निरंतर वार्षिक जोडा जाता है और बेला को 20 वर्षों के बाद ऋण लौटाना है। वह कितनी रकम लौटाएगी ? 3

7. वक्र $y^2(x-2) = x^2(x+2)$ का अनरेखण कीजिए। अनरेखण के लिए प्रयोग किये गये गण-धर्मों को भी लिखिए। 10

8. (क) यदि :

$$I_n = \int \frac{\sin nx}{\sin x}\, dx$$

है, तो जाँच कीजिए कि :

$$I_n = \frac{2\sin\left[(n-1)x\right]}{n-1} + I_{n-2} \;\forall\, n \geq 2$$

है या नहीं। यदि समीकरण सही है तो इसका प्रयोग करके $a$ और $b$ के मान ज्ञात कीजिए, जबकि :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\, dx = \begin{cases} a, & \text{यदि } n \text{ सम है} \\ b, & \text{यदि } n \text{ विषम है} \end{cases}$$

यदि $I_n$ और $I_{n-2}$ का संबंध बताने वाली ऊपर दी गयी समीकरण सही नहीं है, तो $I_5 - I_2$ का मान ज्ञात कीजिए। 6





(ख) यदि $y = e^{m\left(\tan^{-1} x\right)}$ है: तो लाइब्निज प्रमेय का प्रयोग करके $y_{n+1}, y_n$ और $y_{n-1}$ में $n \geq 1$ के लिए संबंध स्थापित कीजिए। 4

9. (क) $x^2 + y^2 = 64$ को $y^2 = 12x$ द्वारा विभाजित करने पर प्राप्त प्रदेशों में से बड़े प्रदेश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 8

(ख) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}, a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0$ ज्ञात कीजिए। 2

10. (क) वक्रों $x^2 - y^2 = 5$ और $x^2 + y^2 = 5\sqrt{2}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। 6

(ख) जाँच कीजिए कि फलन :

$$f : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R} \;:\; f(x) = \sec\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$

प्रतिलोम फलन प्रमेय (IFT) की परिकल्पनाओं को संतुष्ट करता है या नहीं। यदि करता है तो क्या निष्कर्ष संबंध होगा ?

यदि $f$, IFT की परिकल्पनाओं को संतुष्ट नहीं करता है, तो जाँच कीजिए कि यह मध्यमान प्रमेय की परिकल्पनाओं को संतष्ट करता है या नहीं। 4