No. of Printed Pages : 16 **BMTC-133**

BACHELOR OF SCIENCE/BACHELOR OF ARTS

(BSCG/BAG)

Term-End Examination

December, 2021

BMTC-133 : REAL ANAYSIS

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : *(i) The question paper has **three** Sections— Sections A, B and C.*

(ii) All questions in Section A and Section B are compulsory.

*(iii) Do any **five** questions from those given in Section C.*

(iv) Use of calculator is not allowed.

Section—A (Marks : 20)

1. Which of the following statements are true ? Give reasons for your answers in the form of a

short proof or counter-example, whichever is appropriate : 2×10=20

(i) Every bounded subset of $\mathbf{R}$ is closed.

(ii) The negation of the statement $p \vee q \to r$ is $(p \vee q) \wedge \sim r$.

(iii) $7^n + 1$ is divisible by 2 for every $n \in \mathbf{N}$.

(iv) The sequence $(3^n - 2^n)_{n \in \mathbf{N}}$ is increasing.

(v) The series $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ diverges.

(vi) Every strictly decreasing function is invertible.

(vii) The equation $x^3 - 2x + 3 = 0$ has a real root between -2 and 1.

(viii) An integrable function has finitely many points of discontinuities.

(ix) The function f defined on $\mathbf{R}$ by $f(x) = |x + 5|$ has a local minimum at $x = -5$.

(x) If $f(0) = 0$ and $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ for $x \neq 0$, then f is continuous at 0.

Section—B (Marks : 30)

2. (a) Check whether the set $]-5, 7] \cap [-7, 5[$ contains any ε-neighbourhood of 3. 2

(b) What are the sufficient conditions for a set to have a limit point ? Check whether the set $\left\{ \pm \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$ has any limit point in $\mathbf{R}$. 3

3. (a) Using the definition, show that the sequence $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)_{n \in \mathbf{N}}$ is Cauchy. 3

(b) Give an example of a divergent sequence which has two convergent subsequences. Justify your choice of example. 2

4. Test the following series for convergence : 5

(i) $\frac{1.2}{3^2.4^2} + \frac{3.4}{5^2.6^2} + \frac{5.6}{7^2.8^2} + \ldots\ldots.$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^3-1}$

5. Check whether the following functions are continuous on $\mathbf{R}$. If they are discontinuous, find the nature of discontinuities. : 6

(i) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{if } x \neq 1 \\ 1, & \text{if } x = 1 \end{cases}$

(ii) $g(x) = \begin{cases} 2, & \text{if } x \in \mathbf{Q} \\ 4, & \text{if } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$

6. Let :

$$f(x) = 3x + 2, x \in [0, 1].$$

Let $\mathbf{P}_n$ be the tagged partition formed by the subintervals :

$\mathrm{I}_1 = \left[0, \frac{1}{n}\right], \mathrm{I}_2 = \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots\ldots\ldots,$

$$I_i = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], ..., I_n = \left[\frac{n-1}{n}, 1\right],$$

where the tags are given by :

$$t_i = \frac{i}{n}, i = 1, 2, ..., n.$$

Calculate the Riemann sums. Is f Riemann integrable ? Justify your answer. 6

7. Using the Weierstrass M-test, show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}, x \in \mathbf{R}$ converges uniformly. 3

Section—C (Marks : 50)

8. (a) Find the interior of the set : 4

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left]\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right[$$

(b) Prove that $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ defined by $a_1 = 1$ and $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$ for $n > 1$, is increasing, bounded and converges to 3. 6

9. (a) Test the conditional convergence of the series :

$$1 - \frac{1}{2^{1/3}} + \frac{1}{3^{1/3}} - \frac{1}{4^{1/3}} + ...$$

Is it absolutely convergent ? Justify your answer. 5

(b) Prove that between any two real roots of $e^x \sin x = 1$, there is at least one real root of $e^x \cos x + 1 = 0$. 5

10. (a) For $x \in [0,1]$ and $n \in \mathbf{N}$, define $f_n(x) = 2x + \frac{x}{n}$. Find the limit function f of the sequence $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Is f continuous ? Does $\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$? Justify your answers. 5

(b) Show that $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, where $a_n = \frac{n}{n^2 + 2}$ is monotone. Is $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ Cauchy ? Is $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergent ? Justify your answers. 5

11. (a) Give a direct proof and an indirect proof of the statement "The product of two odd integers is an odd integer." 5

(b) If f is differentiable on $\mathrm{I} = [a, b]$ and k is a number between $f'(a)$ and $f'(b)$, then show that there exists at least one c such that $f'(c) = k$. 5

12. (a) Let the function f be defined on $\mathbf{R}$ by

$$f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \text{ if } x \neq 0 \text{ and } f(0) = 0.$$

Show that f' is continuous of $\mathbf{R}$, but it is not derivable at 0. 5

(b) Find the sequence of partial sums of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n+1)}$, where $x \in [\,0, \infty\,[$.

Does the sequence converge pointwise ? Does it converge uniformly ? Justify your answers. 5

13. (a) Apply the Cauchy integral test to find : 5

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{3n} \frac{n}{(3n + r)^2}.$$

(b) Test the following series for convergence : 5

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^n$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{n+1}$

14. (a) Find the greatest value of the function :

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 7$$

over the interval [0, 1]. 5

(b) Check whether the set of rational numbers is a field or not. 5

BMTC-133

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

[बी. एस-सी. (जी)/ बी.ए. (जी)]

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2021

बी.एम.टी.सी.-133 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : (i) इस प्रश्न-पत्र में तीन भाग हैं— भाग 'क', भाग 'ख' और भाग 'ग' ।

(ii) भाग 'क' और भाग 'ख' के सभी प्रश्न **अनिवार्य** हैं।

(iii) भाग 'ग' से किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(iv) कैलकलेटर का प्रयोग करने की अनमति नहीं है।

भाग—क (अंक : 20)

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं ? अपने उत्तरों के कारण एक लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण के रूप में दीजिए : 2×10=20

(i) $\mathbf{R}$ का प्रत्येक परिबद्ध उपसमच्चय संवृत है।

(ii) कथन $p \vee q \to r$ का निषेध $(p \vee q) \wedge \sim r$ है।

(iii) प्रत्येक $n \in \mathbf{N}$ के लिए, $7^n + 1, 2$ से विभाज्य है।

(iv) अनुक्रम $\left(3^n - 2^n\right)_{n \in \mathbf{N}}$ वर्धमान है।

(v) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ अपसारी है।

(vi) प्रत्येक निरंतर ह्रासमान फलन व्युत्क्रमणीय है।

(vii) समीकरण $x^3 - 2x + 3 = 0$ का –2 और 1 के बीच में एक वास्तविक मूल है।

(viii) एक समाकलनीय फलन के असांतत्य के परिमितानेक बिन्दु होते हैं।

(ix) $f(x) = |x + 5|$ द्वारा $\mathbf{R}$ पर परिभाषित फलन f का $x = -5$ पर एक स्थानीय निम्निष्ठ है।

(x) यदि $f(0) = 0$ और $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, x \neq 0$ है, तो $f, 0$ पर संतत है।

भाग—ख (अंक : 30)

2. (क) जाँच कीजिए कि क्या समच्चय $]-5, 7] \cap [-7, 5[$ में 3 का कोई ε-प्रतिवेश है या नहीं। 2

(ख) एक समच्चय का कोई सीमा बिन्दु होने के लिए पर्याप्त प्रतिबंध क्या हैं ? जाँच कीजिए कि समच्चय $\left\{\pm \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$ का $\mathbf{R}$ में कोई सीमा बिन्दु है या नहीं। 3

3. (क) परिभाषा के प्रयोग से दिखाइए कि अनुक्रम $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ कॉशी है। 3

(ख) एक ऐसे अपसारी अनुक्रम का उदाहरण दीजिए जिसके दो अभिसारी उपअनुक्रम हों। अपने उदाहरण के चयन की पुष्टि कीजिए। 2

4. निम्नलिखित श्रेणियों के अभिसरण की जाँच कीजिए : 5

(i) $\frac{1.2}{3^2.4^2} + \frac{3.4}{5^2.6^2} + \frac{5.6}{7^2.8^2} + \ldots\ldots.$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^3-1}$

5. जाँच कीजिए कि निम्नलिखित फलन $\mathbf{R}$ पर संतत हैं या नहीं। यदि वे असंतत हैं, तो असांतत्य की प्रकति ज्ञात कीजिए : 6

(i) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{यदि } x \neq 1 \\ 1, & \text{यदि } x = 1 \end{cases}$

(ii) $g(x) = \begin{cases} 2, & \text{यदि } x \in \mathbf{Q} \\ 4, & \text{यदि } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$

6. मान लीजिए $f(x) = 3x + 2, x \in [0,1]$ है। मान लीजिए $\mathbf{P}_n$ एक चिन्हित विभाजन है, जो अंतरालों $\mathrm{I}_1 = \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $\mathrm{I}_2 = \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$, ..., $\mathrm{I}_i = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, ..., $\mathrm{I}_n = \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$ से बना है, जहाँ टैग $t_i = \frac{i}{n}$, $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ द्वारा दिए गए

हैं। रीमान योगफल ज्ञात कीजिए। क्या f रीमान समाकलनीय है ? अपने उत्तर की पष्टि कीजिए। 6

7. वीयरस्ट्रास M–परीक्षण का प्रयोग करके, दिखाइए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}, x \in \mathbf{R}$ एकसमानतः अभिसारी है। 3

भाग—ग (अंक : 50)

8. (क) समच्चय $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left]\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right[$ का अभ्यंतर ज्ञात कीजिए। 4

(ख) सिद्ध कीजिए कि $a_1 = 1$ और $n > 1$ के लिए $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$ द्वारा परिभाषित अनक्रम $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ वर्धमान है, परिबद्ध है और 3 की ओर अभिसरित होता है। 6

9. (क) श्रेणी :

$$1 - \frac{1}{2^{1/3}} + \frac{1}{3^{1/3}} - \frac{1}{4^{1/3}} + \ldots\ldots$$

के सप्रतिबंध अभिसरण की जाँच कीजिए। क्या यह निरपेक्षतः अभिसारी है ? अपने उत्तर की पष्टि कीजिए। 5

(ख) सिद्ध कीजिए कि $e^x \sin x = 1$ के किन्हीं भी **दो** वास्तविक मलों के बीच में कम से कम एक वास्तविक मल $e^x \cos x + 1 = 0$ का है। 5

10. (क) $x \in [0,1]$ और $n \in \mathbf{N}$ के लिए $f_n(x) = 2x + \frac{x}{n}$ परिभाषित कीजिए। अनक्रम $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ का सीमा फलन f ज्ञात कीजिए। क्या f संतत है ? क्या $\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$ है ? अपने उत्तरों की पष्टि कीजिए। 5

(ख) दिखाइए कि $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, जहाँ $a_n = \frac{n}{n^2+2}$ है, एकदिष्ट है। क्या $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ कॉशी है ? क्या $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ अभिसारी है ? अपने उत्तरों की पष्टि कीजिए। 5

11. (क) कथन "दो विषम पर्णांकों का गणनफल एक विषम पर्णांक होता है।" की एक प्रत्यक्ष एवं एक अप्रत्यक्ष उपपत्ति दीजिए। 5

(ख) यदि $f, \mathrm{I} = [a,b]$ पर अवकलनीय है और $k, f'(a)$ और $f'(b)$ के बीच में कोई संख्या है, तो दिखाइए कि कम से कम एक c इस प्रकार है कि $f'(c) = k$ है। 5

12. (क) मान लीजिए कि फलन $f, \mathbf{R}$ पर $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, यदि $x \neq 0$ और $f(0) = 0$ द्वारा परिभाषित फलन है। दिखाइए कि $f', \mathbf{R}$ पर संतत है, लेकिन यह 0 पर अवकलनीय नहीं है। 5

(ख) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n+1)}$ के आंशिक योगफलों का अनक्रम ज्ञात कीजिए, जहाँ $x \in [0,\infty[$ है। क्या यह अनक्रम बिंदशः अभिसारी है ? क्या यह एकसमानतः अभिसारी है ? अपने उत्तरों की पष्टि कीजिए। 5

13. (क) $\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{3n} \frac{n}{(3n+r)^2}$ ज्ञात करने के लिए कॉशी समाकल परीक्षण का प्रयोग कीजिए। 5

(ख) निम्नलिखित श्रेणियों के अभिसरण की जाँच कीजिए : 5

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1} \right)^n$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{n+1}$

14. (क) फलन $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 7$ का अंतराल $[0,1]$ पर अधिकतम मान ज्ञात कीजिए। 5

(ख) जाँच कीजिए कि परिमेय संख्याओं का समच्चय एक क्षेत्र है या नहीं। 5