

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

February, 2021

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-08 : DIFFERENTIAL EQUATIONS**

Time : 2 hours

*Maximum Marks : 50
(Weightage : 70%)*

Note : *Question no. 1 is **compulsory**. Attempt any **four** questions from the remaining questions no. 2 to 7. Use of calculators is **not** allowed.*

1. State whether the following statements are *true* or *false*. Justify your answer with the help of a short proof or a counter-example. 5×2=10

(i) The differential equation

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

is of order 2 and degree 3.

(ii) The complementary function of the differential equation $(x^2D^2 - 3xD + 4)y = 2x^2$ is $(C_1 + C_2 \ln x)x$, where C_1 and C_2 are constants.

- (iii) The solution of second order partial differential equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = x^3 - y$$

involves two arbitrary functions.

- (iv) The differential equation

$$(y^2 + yz)dx + (xz + z^2)dy + (y^2 - xy)dz = 0$$

is integrable.

- (v) The partial differential equations $xp - yq = x$,
and $x^2p + q = xz$ are not compatible.

2. (a) Solve the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y - 1}{x + y + 3}. \quad 3$$

- (b) Solve the differential equation $y = 2p + 3p^2$. 3

- (c) Use the method of undetermined coefficients to find the general solution of the differential equation

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{2d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 1 + xe^x. \quad 4$$

3. (a) Solve the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 1 + x^2 + y^2$$

given $y_1(x) = x$ is a solution. 3

(b) Solve : 4

$$(D^3 + 2D^2 + D)y = e^{2x} + x^2 + x$$

(c) Solve the differential equation

$$(D^2 - DD' - 6D'^2)z = xy. \quad 3$$

4. (a) Find the complete integral of the equation
 $p^2 + q^2 - 2px - 2qy + 1 = 0.$ 4

(b) Solve : 4

$$(x^2D^2 - 2xy DD' + y^2D'^2 - xD + 3yD')z = \frac{8y}{x}$$

(c) Find the differential equation of the family of circles of fixed radius r with centre on y -axis. 2

5. (a) Apply the method of variation of parameters to solve the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cosec} x. \quad 4$$

(b) Find the solution $\theta(x, t)$ of the following p.d.e. using the method of separation of variables

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{\partial\theta}{\partial t}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{with } \frac{\partial}{\partial x} \theta(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} \theta(\pi, t) = 0 \\ \text{and } \theta(x, 0) = f(x) \end{array} \right\} 0 \leq x \leq \pi \quad 6$$

6. (a) If the population of the country doubles in 50 years, in how many years will it become three times assuming that the rate of increase of population is proportional to the number of inhabitants ? 4

- (b) Find a particular integral of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = xe^x \sin x. \quad 2$$

- (c) Solve the differential equation

$$(1 - y^2) dx - (\tan^{-1} y - x) dy = 0. \quad 4$$

7. (a) Find the integrating factor of the differential equation

$$(6xy - 3y^2 + 2y) dx + 2(x - y) dy = 0$$

and hence solve it. 3

- (b) Find the integral curves of the differential equation

$$(mz - ny)p + (nx - lz)q = (ly - mx). \quad 3$$

- (c) Solve the following differential equation by reducing it to the normal form : 4

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \left(n^2 + \frac{2}{x^2}\right)y = xe^x$$

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

फरवरी, 2021

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-08 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट : प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है । शेष प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य । संक्षिप्त उपपत्ति अथवा प्रत्युदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए ।

5×2=10

(i) अवकल समीकरण

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

कोटि 2 और घात 3 वाला समीकरण है ।

(ii) अवकल समीकरण $(x^2D^2 - 3xD + 4)y = 2x^2$ का पूरक फलन $(C_1 + C_2 \ln x)x$ है, जहाँ C_1 और C_2 अचर हैं ।

(iii) द्वितीय कोटि आंशिक अवकल समीकरण

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = x^3 - y$$

के हल में दो स्वेच्छ फलन शामिल होते हैं ।

(iv) अवकल समीकरण

$$(y^2 + yz)dx + (xz + z^2)dy + (y^2 - xy)dz = 0$$

समाकलनीय है ।

(v) आंशिक अवकल समीकरण $xp - yq = x$, और $x^2p + q = xz$ सुसंगत नहीं हैं ।

2. (क) अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y - 1}{x + y + 3} \quad \text{का हल प्राप्त कीजिए ।} \quad 3$$

(ख) अवकल समीकरण $y = 2p + 3p^2$ को हल कीजिए । 3

(ग) अनिर्धारित गुणांक विधि द्वारा अवकल समीकरण

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{2d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 1 + xe^x$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए । 4

3. (क) अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 1 + x^2 + y^2$$

का हल प्राप्त कीजिए जबकि दिया गया है कि

$y_1(x) = x$, समीकरण का एक हल है । 3

(ख) हल कीजिए : 4

$$(D^3 + 2D^2 + D)y = e^{2x} + x^2 + x$$

(ग) अवकल समीकरण

$$(D^2 - DD' - 6D'^2)z = xy$$

का हल प्राप्त कीजिए । 3

4. (क) समीकरण

$$p^2 + q^2 - 2px - 2qy + 1 = 0$$

का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए । 4

(ख) हल कीजिए : 4

$$(x^2D^2 - 2xy DD' + y^2D'^2 - xD + 3yD')z = \frac{8y}{x}$$

(ग) नियत त्रिज्या r वाले वृत्त-कुल, जिनके केन्द्र y -अक्ष पर हैं,
का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए । 2

5. (क) प्राचल विचरण विधि से अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cosec} x$$

का हल प्राप्त कीजिए । 4

(ख) चर-पृथक्करण विधि से आंशिक अवकल समीकरण

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

का हल $\theta(x, t)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ 6

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \theta(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} \theta(\pi, t) = 0 \\ \theta(x, 0) = f(x) \end{array} \right\} 0 \leq x \leq \pi \text{ के लिए}$$

तथा

$$\theta(x, 0) = f(x)$$

6. (क) यदि किसी देश की जनसंख्या 50 वर्षों में दुगुनी हो जाती है, तो कितने वर्षों में तीन गुनी हो जाएगी यदि मान लिया जाए कि जनसंख्या की वृद्धि दर जनसंख्या के समानुपाती है ? 4

(ख) अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = xe^x \sin x$$

का विशेष समाकल ज्ञात कीजिए । 2

(ग) अवकल समीकरण

$$(1 - y^2) dx - (\tan^{-1} y - x) dy = 0$$

को हल कीजिए । 4

7. (क) अवकल समीकरण

$$(6xy - 3y^2 + 2y) dx + 2(x - y) dy = 0$$

का समाकलन गुणक ज्ञात कीजिए और फिर इसे हल कीजिए । 3

(ख) अवकल समीकरण

$$(mz - ny)p + (nx - lz)q = (ly - mx)$$

के समाकल वक्र ज्ञात कीजिए । 3

- (ग) निम्नलिखित अवकल समीकरण को प्रसामान्य रूप में समानीत करके हल प्राप्त कीजिए : 4

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \left(n^2 + \frac{2}{x^2} \right) y = xe^x$$