# BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

## Term-End Examination

## February, 2021

## ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
## MTE-06 : ABSTRACT ALGEBRA

*Time : 2 hours* *Maximum Marks : 50*

*(Weightage : 70%)*

---

***Note :*** *Question no.* ***7*** *is* ***compulsory****. Answer any* ***four*** *questions from questions no.* ***1*** *to* ***6****. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

---

**1.** (a) Check whether or not $<(1\ 2\ 3)>$ is a Sylow 3-subgroup of $S_4$. Further, find all the Sylow 3-subgroups of $S_4$. *5*

(b) Give the addition and multiplication tables for the ring $\mathbf{Z}_6$. Hence decide whether $\mathbf{Z}_6$ is an integral domain or not. *5*

**2.** (a) Give two distinct generators for the multiplicative group of $\mathbf{Z}_7^*$, with justification. *3*

(b) Check whether or not the following is a subring of $\mathbf{M}_2(\mathbf{Z})$ :

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c \in \mathbf{Z} \right\}$$

Further, find all the units in T. *4*

(c) Write the permutation $\sigma = (2\ 4\ 5)\ (1\ 4\ 5)$ as a product of disjoint cycles. Also find the order of $\sigma$ in $S_6$. *3*

**3.** (a) Check whether or not $\mathbf{Z}^2/\mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}$, as rings. *7*

(b) Let $G = \mathbf{M}_5(\mathbf{Q})$. Check whether or not $*$ is a binary operation on G, where $*$ is defined by

$$A * B = (A + B)^t.$$

Further, also check whether or not $(G, *)$ is a group. *3*

**4.** (a) Give an example, with justification, of an integral domain which is not a principal ideal domain. *4*

(b) If G is a group of order 40, and H and K are its subgroups of orders 20 and 10, respectively then check whether or not $HK \leq G$. Further, show that $O(H \cap K) \geq 5$. *4*

(c) If G is a group such that $\exists$ a, b $\in$ G with $ab \neq ba$, then find the minimum possible order of G. *2*

**5.** (a) Show that the composition of group isomorphisms is a group isomorphism. *3*

(b) Check whether or not $5x^3 - 10x - 10$ is irreducible over (i) $\mathbf{Z}[x]$, (ii) $\mathbf{Q}[x]$. *5*

(c) Describe the subgroups of $(\mathbf{Z}, +)$ of which $9\mathbf{Z}$ is also a subgroup. *2*

**6.** (a) Show that $\mathbf{Z} \times \mathbf{R}$ is a group with respect to the usual addition. Also give a nontrivial proper subgroup of this group. *4*

(b) Give an example, with justification, of a ring R and a subring S such that S is not an ideal of R. *3*

(c) Apply the principle of mathematical induction to prove that $3 \mid (10^k - 1) \; \forall \; k \in \mathbf{N}$. *3*

**7.** Which of the following statements are true ? Give reasons for your answers. *10*

(i) {Einstein, IGNOU, $-\pi$} is a set.

(ii) $\mathbf{Z}_4$ and $\mathbf{A}_4$ are isomorphic groups.

(iii) For every natural number n, there is a unique field with n elements.

(iv) $(xy)^2 = x^2y^2 \ \forall \ x, y \in S_5$.

(v) Every ideal in $\mathbf{Z}$ is a maximal ideal.

**एम.टी.ई.-06**

**स्नातक उपाधि कार्यक्रम**
**(बी.डी.पी.)**

**सत्रांत परीक्षा**

**फरवरी, 2021**

## ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

## एम.टी.ई.-06 : अमूर्त बीजगणित

*समय : 2 घण्टे* *अधिकतम अंक : 50*
*(कुल का : 70%)*

---

***नोट :*** *प्रश्न सं.* ***7*** *करना* ***अनिवार्य*** *है । प्रश्न सं.* ***1*** *से* ***6*** *में से किन्हीं* ***चार*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति* ***नहीं*** *है ।*

---

**1.** (क) जाँच कीजिए कि $<(1\ 2\ 3)>$ $S_4$ का एक सीलो 3-उपसमूह है या नहीं । आगे, $S_4$ के सभी सीलो 3-उपसमूह ज्ञात कीजिए । *5*

(ख) वलय $\mathbf{Z}_6$ के लिए योग और गुणन सारणियाँ दीजिए । इस तरह निर्णय कीजिए कि $\mathbf{Z}_6$ एक पूर्णांकीय प्रांत है या नहीं । *5*

2. (क) पुष्टि करते हुए, $\mathbf{Z}_7^*$ के गुणनात्मक समूह के लिए, दो अलग-अलग जनक दीजिए । *3*

(ख) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित $\mathbf{M}_2(\mathbf{Z})$ की एक उपवलय है या नहीं :

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c \in \mathbf{Z} \right\}$$

आगे, T में सभी मात्रक ज्ञात कीजिए । *4*

(ग) क्रमचय $\sigma = (2\ 4\ 5)\ (1\ 4\ 5)$ को असंयुक्त चक्रों के एक गुणनफल के रूप में लिखिए । साथ ही, $S_6$ में $\sigma$ की कोटि भी ज्ञात कीजिए । *3*

3. (क) जाँच कीजिए कि वलयों के रूप में $\mathbf{Z}^2/\mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}$ है या नहीं । *7*

(ख) मान लीजिए कि $G = \mathbf{M}_5(\mathbf{Q})$ है । जाँच कीजिए कि G पर $*$ एक द्विआधारी संक्रिया है या नहीं, जहाँ $*$ $A * B = (A + B)^t$ द्वारा परिभाषित है ।

आगे, इसकी भी जाँच कीजिए कि $(G, *)$ एक समूह है या नहीं । *3*

4. (क) पुष्टि करते हुए, पूर्णांकीय प्रांत का एक ऐसा उदाहरण दीजिए, जो एक मुख्य गुणजावली प्रांत नहीं है । *4*

(ख) यदि G कोटि 40 का एक समूह है तथा H और K क्रमश: कोटियों 20 और 10 के उपसमूह हैं, तो जाँच कीजिए कि $HK \leq G$ है या नहीं । आगे, दर्शाइए कि $O(H \cap K) \geq 5$ है । *4*

(ग) यदि G एक ऐसा समूह है कि $ab \neq ba$ के लिए $a, b \in G$ का अस्तित्व है, तो G की न्यूनतम संभव कोटि ज्ञात कीजिए । *2*

**5.** (क) दर्शाइए कि समूह तुल्याकारिताओं का संयोजन एक समूह तुल्याकारिता होता है । *3*

(ख) जाँच कीजिए कि $5x^3 - 10x - 10$ निम्नलिखित पर अखंडनीय है या नहीं : *5*

(i) $\mathbf{Z}[x]$

(ii) $\mathbf{Q}[x]$

(ग) $(\mathbf{Z}, +)$ के उन उपसमूहों का वर्णन कीजिए जिसका $9\mathbf{Z}$ भी एक उपसमूह है । *2*

**6.** (क) दर्शाइए कि $\mathbf{Z} \times \mathbf{R}$ सामान्य योग के सापेक्ष एक समूह है । साथ ही, इस समूह का एक अतुच्छ उचित उपसमूह भी दीजिए । *4*

(ख) पुष्टि करते हुए, एक ऐसे वलय R और उपवलय S का उदाहरण दीजिए जिसके लिए S, R की गुणजावली नहीं हो । *3*

(ग) $3 \mid (10^k - 1) \; \forall \; k \in \mathbf{N}$ को सिद्ध करने के लिए, गणितीय आगमन के नियम का अनुप्रयोग कीजिए । *3*

**7.** निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं ? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए । *10*

(i) {आइन्स्टाइन, IGNOU, $-\pi$} एक समुच्चय है ।

(ii) $\mathbf{Z}_4$ और $\mathbf{A}_4$ तुल्यकारी समूह हैं ।

(iii) प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए, n अवयवों वाला एक अद्वितीय क्षेत्र होता है ।

(iv) $(xy)^2 = x^2y^2 \ \forall \ x, y \in S_5$.

(v) $\mathbf{Z}$ में प्रत्येक गुणजावली एक उच्चिष्ठ गुणजावली होती है ।