No. of Printed Pages : 8 **MTE-02**

# BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

# Term-End Examination

# February, 2021

## ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

## MTE-02 : LINEAR ALGEBRA

*Time : 2 hours* *Maximum Marks : 50*

*(Weightage : 70%)*

---

***Note :*** *Attempt **five** questions in all. Question no. **7** is **compulsory**. Answer any **four** questions from questions no. **1** to **6**. Use of calculators is **not** allowed.*

---

**1.** (a) Find Adj(A), where $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Hence find $A^{-1}$. *5*

(b) Let $P_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2$ real numbers$\}$, be a vector space over **R** with respect to the usual addition and scalar multiplication.

Let $S = \{x + 1, \ 3x + 2\}$. Is S linearly independent ? If yes, find a basis of $P_2$ containing S. If S is not linearly independent, then give the standard basis of $P_2$ over **R**. *3*

(c) Can $\begin{bmatrix} i \\ -i \end{bmatrix}$ be a column of a unitary matrix ?

Justify your answer. *2*

2. (a) Find the radius and centre of the circular section of the sphere $|\mathbf{r}| = 5$ cut off by the plane *4*

$$\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) = 4$$

(b) Let $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Find a column vector X for which AX = cX, for some $c \in \mathbf{R}$. *2*

(c) Give an example, with justification, of a skew-Hermitian operator on $\mathbf{C}^2$. *2*

(d) Check whether or not the following linear system is consistent : *2*

$$3 + t = x + y + z, \quad 2 + 2t = x + 2y - z,$$
$$4 - t = x - y + 4z.$$

3. (a) Find the inverse of the following matrix using the row reduction method : *5*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(b) Find the eigenvalues and an eigenvector per eigenvalue of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -3 \\ -5 & 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

Is A diagonalisable ? Give reasons for your answer. *5*

4. (a) Define $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 : T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Show that T is a linear transformation. What is the matrix of T with respect to the standard basis ? What is the matrix of T with respect to the basis $\{v_1, v_2\}$ of $\mathbf{R}^2$, where $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (1, -1)$ ? *4*

(b) Find $W^{\perp}$, where $\perp$ is with respect to the standard inner product of $\mathbf{R}^4$, and $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. *3*

(c) Suppose U and W are subspaces of a vector space V, where $\dim_{\mathbf{R}} V = 8$. Suppose $\dim_{\mathbf{R}} U = 4$, and $\dim_{\mathbf{R}} W = 5$. What are the possible values of $\dim_{\mathbf{R}}(U \cap W)$ ? *3*

5. (a) Let $P_k = \{p(x) \mid p(x)$ is a polynomial of degree $\leq k$ with real coefficients$\}$, for $k \in \mathbf{N}$. Apply the Fundamental Theorem of Homomorphism to prove that $\dfrac{P_5}{P_3} \simeq P_1$. *6*

(b) Find the orthogonal and normal canonical forms of $2y^2 - 2yz + 2zx - 2xy$ *4*

6. (a) Let $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (2, 2, 3)$. Find the dual basis for $\{v_1, v_2, v_3\}$. *5*

(b) Let $V = \mathbf{R}^+$, the set of all positive real numbers. Define operations $\oplus$ and $\otimes$ by

$u \oplus v = uv$ and $\alpha \otimes v = v^{\alpha}$, $\forall\ u, v \in V\ \&\ \alpha \in \mathbf{R}$.

Assume that $\oplus$ is a binary operation on V and $\otimes$ is a well-defined 'scalar multiplication'. Show that V is a real vector space with the operations $\oplus$ and $\otimes$. *5*

**7.** Which of the following statements are *true* and which are *false* ? Give reasons for your answer in the form of a short proof or a counter-example. *10*

(i) A homogeneous system of linear equations has only the trivial solution.

(ii) Eigenvalues of $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ are 1, 1.

(iii) If $\{v_1, v_2, v_3\}$ is a set of mutually orthogonal vectors, then so is $\{v_1 + v_2,\ v_2 + v_3,\ v_3 + v_1\}$.

(iv) The operation $*$, defined by $a * b = \sin(ab)$, is a binary operation on $\mathbf{N}$.

(v) If A is a Hermitian matrix, then $-A$ is skew-Hermitian.

**एम.टी.ई.-02**

# स्नातक उपाधि कार्यक्रम
# (बी.डी.पी.)
# सत्रांत परीक्षा
# फरवरी, 2021

## ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
## एम.टी.ई.-02 : रैखिक बीजगणित

*समय : 2 घण्टे* | *अधिकतम अंक : 50*
*(कुल का : 70%)*

***नोट :*** *सभी में से **पाँच** प्रश्न कीजिए । प्रश्न सं. **7** करना **अनिवार्य** है । प्रश्न सं. **1** से **6** में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

---

**1.** (क) Adj(A) ज्ञात कीजिए, जहाँ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. इससे $A^{-1}$ ज्ञात कीजिए । *5*

(ख) मान लीजिए

$P_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}\}$

**R** पर साधारण योग और अदिश गुणन के सापेक्ष सदिश समष्टि है ।

मान लीजिए $S = \{x + 1, 3x + 2\}$ है । क्या S रैखिकतः स्वतंत्र है ? यदि हाँ, तो S में अंतर्विष्ट $P_2$ का आधार ज्ञात कीजिए । यदि S रैखिकतः स्वतन्त्र नहीं है, तो **R** पर $P_2$ का मानक आधार दीजिए । *3*

(ग) क्या $\begin{bmatrix} i \\ -i \end{bmatrix}$ एक ऐकिक आव्यूह का एक स्तंभ हो सकता है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *2*

**2.** (क) गोले $|\mathbf{r}| = 5$ के समतल $\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) = 4$ द्वारा किए गए वृत्तीय परिच्छेद की त्रिज्या और केंद्र ज्ञात कीजिए । *4*

(ख) मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ है ।

एक ऐसा स्तंभ सदिश X ज्ञात कीजिए जिसके लिए, किसी $c \in \mathbf{R}$ के लिए $AX = cX$ होता है । *2*

(ग) $\mathbf{C}^2$ पर, पुष्टि सहित, एक विषम-हर्मिटीय संकारक का उदाहरण दीजिए । *2*

(घ) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित रैखिक निकाय संतत है या नहीं : *2*

$$3 + t = x + y + z, \ \ 2 + 2t = x + 2y - z,$$
$$4 - t = x - y + 4z.$$

**3.** (क) पंक्ति समानयन विधि द्वारा निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए : *5*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(ख) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -3 \\ -5 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ के आइगेनमान और प्रत्येक आइगेनमान के लिए एक आइगेनसदिश ज्ञात कीजिए । क्या A विकर्णनीय है ? अपने उत्तर के कारण दीजिए । *5*

**4.** (क) $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ को $T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ द्वारा परिभाषित कीजिए । दर्शाइए कि T एक रैखिक रूपांतरण है । मानक आधार के सापेक्ष T का आव्यूह क्या है ? $\mathbf{R}^2$ के आधार $\{v_1, v_2\}$ जहाँ $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (1, -1)$, के सापेक्ष T का आव्यूह क्या है ? *4*

(ख) $W^{\perp}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $\perp$, $\mathbf{R}^4$ पर मानक आंतर गुणनफल के सापेक्ष है और

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$ *3*

(ग) मान लीजिए U तथा W सदिश समष्टि V की उपसमष्टियाँ हैं, जहाँ $\dim_{\mathbf{R}} V = 8$. यह भी मान लीजिए $\dim_{\mathbf{R}} U = 4$, और $\dim_{\mathbf{R}} W = 5$. $\dim_{\mathbf{R}}(U \cap W)$ के संभव मान क्या हो सकते हैं ? *3*

**5.** (क) मान लीजिए, $k \in \mathbf{N}$ के लिए

$P_k = \{p(x) \mid p(x)$ वास्तविक गुणांकों सहित घात $\leq k$ का बहुपद है$\}$. समाकारिता के मूल प्रमेय द्वारा सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{P_5}{P_3} \simeq P_1$. *6*

(ख) $2y^2 - 2yz + 2zx - 2xy$ का प्रसामान्य विहित समघात और लांबिक विहित समघात ज्ञात कीजिए । *4*

**6.** (क) मान लीजिए $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (2, 2, 3)$ है । $\{v_1, v_2, v_3\}$ का द्वैत आधार ज्ञात कीजिए । *5*

(ख) मान लीजिए $V = \mathbf{R}^+$, सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है । $u \oplus v = uv$ और $\alpha \otimes v = v^{\alpha}$, $\forall\, u, v \in V$ और $\alpha \in \mathbf{R}$ द्वारा दो संक्रियाएँ $\oplus$ तथा $\otimes$ परिभाषित कीजिए । मान लीजिए $\oplus$, V पर एक द्वि-आधारी संक्रिया है और $\otimes$ एक सुपरिभाषित 'अदिश गुणन' है । दिखाइए कि V संक्रियाएँ $\oplus$ और $\otimes$ के सापेक्ष एक वास्तविक सदिश समष्टि है । *5*

**7.** निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन *सत्य* हैं और कौन-से *असत्य* हैं ? लघु-उपपत्ति या प्रत्युदाहरण द्वारा अपने उत्तर के कारण दीजिए । *10*

(i) एक समघात रैखिक समीकरण निकाय के लिए केवल तुच्छ हल ही होते हैं ।

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ के आइगेनमान 1, 1 हैं ।

(iii) यदि $\{v_1, v_2, v_3\}$ परस्पर लांबिक सदिशों का समुच्चय है तो $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1\}$ भी परस्पर लांबिक सदिशों का समुच्चय है ।

(iv) संक्रिया $*$, जो $a * b = \sin(ab)$ द्वारा परिभाषित है, $\mathbf{N}$ पर एक द्वि-आधारी संक्रिया है ।

(v) यदि A एक हर्मिटी आव्यूह है, तो $-A$ विषम-हर्मिटी है ।