

No. of Printed Pages : 16

MTE-14

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

December, 2020

MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

Weightage : 70%

Note : (i) *Attempt any **five** questions.*

(ii) *All questions carry equal marks.*

(iii) *Use of calculators is not allowed.*

1. (a) Use dimensional analysis to derive an expression for the frequency of vibration of a guitar string, knowing that the process of plunking of a guitar string results in the frequency of vibration (of dimension $\frac{1}{T}$) is a function of Young's modulus, the length

and density of the string. (Dimension of Young's modulus is same as force per unit area.) 4

- (b) A drug is induced in a patient's bloodstream at a constant rate r gms/sec. Simultaneously, the drug is removed at a rate proportional to the amount $x(t)$ of the drug present at any time t . Determine the differential equation governing the amount $x(t)$. If the initial concentration of drug in the bloodstream is x_0 , find the concentration of the drug at any time t . 4

- (c) Write the difference between the geocentric model and the heliocentric model used to study the solar system. 2

2. (a) Consider a deer population $x(t)$ at any time $t (> 0)$. If (ax) is the rate at which birth occurs and (bx^2) is the death rate (both a and b are constants), then formulate the model of deer population, given that initial population is 120 deer

and there are 8 births and 6 deaths per month occurring at $t = 0$. How many months does it take for $x(t)$ to reach 95% of the limiting population $\left(\frac{a}{b}\right)$? 4

- (b) The population $x(t)$ and $y(t)$ satisfy the model given by the equations :

$$\frac{dx}{dt} = 14x - 2x^2 - xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 16y - 2y^2 - xy$$

Determine all the critical points of the system and discuss the type and stability of any *two* of these critical points. Which critical point represents the possibility of coexistence of the two populations? 6

3. (a) In a car garage, cars arrive at a rate of 36 cars per day. Assuming that inter-arrival time follows an exponential distribution and the service time distribution is also exponential, with an average of 20 minutes, calculate : 4
- (i) Average number of cars in the queue

- (ii) The probability that the queue size is greater than or equal to 6.
- (b) The differential equations :

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \lambda S$$

and
$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - YI$$

model a disease spread by contact, where S is the number of susceptibles, I is the number of infectives, λ is the birth rate of susceptibles, β is the contact rate and Y is the removal rate. 6

- (i) Identify which term on right hand side of each differential equation arises from birth of susceptibles.
- (ii) Discuss the model given by above two differential equations.
4. (a) Sulphur dioxide is emitted at a rate of 260 gm/sec from a stack with an effective height of 80 m. The wind velocity at the stack is 6 m/sec and the atmospheric stability class is D for the overcast day. Determine the ground level concentration

along the centre line at a distance of 900 m from the stack in micro-grams per cubic metre. (You may use $\sigma_y = 69$ m and $\sigma_z = 29.5$ m as the standard deviation in vertical direction and cross wind direction, respectively). 4

- (b) The sale in a mall since 2011 is given below : 6

| Year | Sale (in ₹ lakh) |
|------|---------------------|
| 2011 | 8 |
| 2012 | 10 |
| 2013 | 7 |
| 2014 | 11 |
| 2015 | 12 |
| 2016 | 9 |

What is least square trend line equation using 2011 as the zero year ?

5. (a) A particle of mass m is thrown vertically upwards with velocity v_0 . The air resistance is $mgcv^2$, where c is a constant

and v is velocity at any time t . Show that the time taken by the particle to reach the highest point is given by :

5

$$v_0\sqrt{c} = \tan(gt\sqrt{c})$$

- (b) Suppose the quarterly sales for a particular make of car in a city were 2682, 2462 and 3012, respectively. From the past data prior to these three data points, a straight line was fit. The value on the line corresponding to the last observed time is 2988 and the slope is 80. Use exponential smoothing based upon the first-three observations given above to forecast sales for the fifth period. Given $\alpha = \beta = 0.2$ [α, β are smoothing constants].

5

6. (a) The demand function for a particular commodity is :

5

$$y = 15e^{-x/3}, \quad 0 \leq x \leq 8$$

where y is the price per unit and x is the number of units demanded. Determine the

price and the quantity for which the revenue is maximum.

- (b) The returns on the securities of two companies X and Y be as given below : 5

| Event (j) | Chance $p_{1j} = p_{2j}$ | Return | |
|-----------|-----------------------------|----------|----------|
| | | R_{1j} | R_{2j} |
| 1 | $\frac{1}{4}$ | 6 | 7 |
| 2 | $\frac{1}{2}$ | 13 | 8 |
| 3 | $\frac{1}{4}$ | 18 | 11 |

Find the expected return on the portfolios $P = (0.7, 0.3)$ and $Q = (0.4, 0.6)$. What inference can you draw by comparing the returns of the portfolios P and Q ?

7. (a) Find the greatest distance that a stone can be thrown inside a horizontal tunnel, 10 m high, with a velocity of projection 80 m/sec. 3

- (b) Consider the motion of a simple pendulum.

Write the differential equation of the simple pendulum with initial conditions

$$\theta = \theta_0 \text{ at } t = 0 \text{ and } \frac{d\theta}{dt} = 0 \text{ at } t = 0 \text{ for both}$$

linear and non-linear models. Give the expressions for the time period for both the cases. 4

- (c) The pay-off matrix of two players A and B, each with three different strategies is : 3

Player B

$$\text{Player A} \begin{bmatrix} 5 & -7 & -17 \\ 4 & 6 & -15 \\ 9 & 10 & -13 \end{bmatrix}$$

Find the saddle point and value of the game.

MTE-14**स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)****सत्रांत परीक्षा****दिसम्बर, 2020****एम.टी.ई.-14 : गणितीय निदर्शन**

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

भारिता: 70%

नोट : (i) किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ii) सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

(iii) कैलकुलेटरो का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (क) विमीय विश्लेषण द्वारा गिटार की तार के कंपन की आवृत्ति के लिए व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए। यदि गिटार के तारों को झंकृत करने की प्रक्रिया से प्राप्त कंपन की आवृत्ति $(\text{विमा} = \frac{1}{T})$ यंग के मापांक, तार की लम्बाई और घनत्व का एक फलन है (विमा बल प्रति इकाई क्षेत्र के बराबर है)।

4

(ख) कोई दवाई एक रोगी की रक्तधारा में r ग्रा./सेकैण्ड की अचर दर से डाली जा रही है। इसके साथ ही, यह दवाई किसी भी समय t पर मौजूदा दवाई की मात्रा $x(t)$ के समानुपाती दर से निकाली जा रही है। मात्रा $x(t)$ नियंत्रित करने वाला अवकल समीकरण निर्धारित कीजिए। यदि रक्तधारा में दवाई की प्रारम्भिक सांद्रता x_0 है, तो दवाई की किसी भी समय t पर सांद्रता ज्ञात कीजिए।

4

(ग) सौर प्रणाली का अध्ययन करने के लिए प्रयुक्त होने वाले भू-केन्द्रीय निदर्श और सूर्य केन्द्रीय निदर्श के बीच अन्तर बताइए।

2

2. (क) किसी भी समय $t (> 0)$ पर हिरण जनसंख्या $x(t)$ लीजिए। यदि जन्मदर ax और मृत्यु दर bx^2 हो, जहाँ a और b दोनों अचर हैं, तब हिरण जनसंख्या का निदर्शन कीजिए। यदि आरंभिक जनसंख्या 120 हिरण है और $t = 0$ पर प्रतिमाह 8 जन्म और 6 मृत्यु होती हों, तो $x(t)$ को सीमांत जनसंख्या $\left(\frac{a}{b}\right)$ के 95% तक पहुँचने में कितने माह लगेंगे?

4

(ख) समष्टि $x(t)$ और $y(t)$ निम्नलिखित समीकरणों द्वारा दिए गए निदर्श को संतुष्ट करते हैं : 6

$$\frac{dx}{dt} = 14x - 2x^2 - xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 16y - 2y^2 - xy$$

निकाय के सभी क्रांतिक बिन्दुओं को निर्धारित कीजिए और किन्हीं ~~दो~~ क्रांतिक बिन्दुओं के प्रकार और स्थायित्व पर चर्चा कीजिए। कौन-सा क्रांतिक बिन्दु दोनों जनसंख्याओं के सह-अस्तित्व की संभावना को निरूपित करता है?

3. (क) एक कार गैराज में 36 कार प्रतिदिन की दर से कारें आती हैं। यह मानकर कि अंतर-आगमन समय एक चरघातांकी बंटन का अनुपालन करता है और सेवा-काल बंटन भी 20 मिनट की औसत वाला चरघातांकी है, तो निम्नलिखित को परिकलित कीजिए : 4

- (i) पंक्ति में लगी कारों की औसत संख्या।
- (ii) पंक्ति का साइज 6 से अधिक या 6 के बराबर होने की प्रायिकता।

(ख) अवकल समीकरण :

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \lambda S$$

$$\text{और} \quad \frac{dS}{dt} = \beta SI - YI$$

संपर्क से फैलने वाले रोग का निदर्श है, जहाँ S सुग्राहियों की संख्या, I संक्रामक व्यक्तियों की संख्या और λ सुग्राहियों की जन्म दर है। β संपर्क दर और Y निष्कासन दर है। 6

(i) पता लगाइए कि प्रत्येक अवकल समीकरण के दाएँ पक्ष में कौन-सा पद सुग्राहियों के जन्म से प्राप्त होता है?

(ii) उपर्युक्त दो अवकल समीकरणों द्वारा प्राप्त होने वाले निदर्श की चर्चा कीजिए।

4. (क) 80 मी. की एक प्रभावी ऊँचाई वाले एक स्टैक से 260 gm/s की दर से सल्फर डाईऑक्साइड उत्सर्जित हो रही है। स्टैक पर पवन वेग 6 m/s है और बदली छाए हुए दिन में वायुमंडलीय स्थायित्व वर्ग D है। माइक्रोग्राम प्रति घन मीटर में

स्टैक से 900 m की दूरी पर केन्द्र रेखा के अनुदिश भूमि तथा तल सांद्रण ज्ञात कीजिए।

(आप निम्नलिखित मानों का प्रयोग कर सकते हैं :

$\sigma_y = 69 \text{ m}$ और $\sigma_z = 29.5 \text{ m}$ क्रमशः

ऊर्ध्वाधर दिशा और अनुप्रस्थ पवन दिशा में मानक विचलन हैं।)

4

(ख) एक मॉल में 2011 से होने वाली बिक्री नीचे दी गई है :

6

| वर्ष | बिक्री (₹ लाखों में) |
|------|------------------------|
| 2011 | 8 |
| 2012 | 10 |
| 2013 | 7 |
| 2014 | 11 |
| 2015 | 12 |
| 2016 | 9 |

2011 को शून्य वर्ष मानने पर न्यूनतम वर्ग उपनति समीकरण क्या होगा?

5. (क) द्रव्यमान m का एक कण वेग v_0 के साथ ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर फेंका गया। वायु प्रतिरोध $mgcv^2$ है, जहाँ c चर है और v किसी

भी समय t पर वेग है। दिखाइए कि कण के सबसे ऊँचे बिन्दु पर पहुँचने में लगने वाला समय $v_0\sqrt{c} = \tan(gt\sqrt{c})$ द्वारा प्राप्त है। 5

- (ख) मान लीजिए एक शहर में एक विशिष्ट कार के मॉडल की तिमाही बिक्रियाँ क्रमशः 2682, 2462 और 3012 थीं। पिछले आँकड़ों (तीन आँकड़ा बिन्दुओं से पहले), से एक सरल रेखा आसंजित की गई है। अंतिम प्रेक्षित समय की संगत रेखा पर मान 2988 और प्रवणता 80 है। ऊपर दिए गए प्रथम तीन प्रेक्षकों पर आधारित चरघातांकीय मसूणीकरण से पाँचवीं अवधि की बिक्री का पूर्वानुमान लगाइए जहाँ $\alpha = \beta = 0.2$ (α, β मसूणीकरण अचर हैं।) 5

6. (क) मान लीजिए कि एक विशिष्ट वस्तु का माँग फलन : 5

$$y = 15e^{-x/3}, \quad 0 \leq x \leq 8$$

है, जहाँ y प्रति इकाई कीमत और x इकाइयों की माँग संख्या है। वस्तु की कीमत और मात्रा ज्ञात कीजिए कि जिससे राजस्व अधिकतम हो।

(ख) दो कम्पनियों X और Y की प्रतिभूतियों का प्रतिफलन नीचे दिया गया है : 5

| घटना (j) | संयोग $p_{1j} = p_{2j}$ | प्रतिफल | |
|-------------|----------------------------|----------|----------|
| | | R_{1j} | R_{2j} |
| 1 | $\frac{1}{4}$ | 6 | 7 |
| 2 | $\frac{1}{2}$ | 13 | 8 |
| 3 | $\frac{1}{4}$ | 18 | 11 |

निवेश सूचियों $P = (0.7, 0.3)$ और $Q = (0.4, 0.6)$ का प्रत्याशित प्रतिफल ज्ञात कीजिए। निवेश सूचियों P और Q के प्रतिफलों की तुलना पर आप किस निष्कर्ष पर पहुँचे?

7. (क) वह अधिकतम दूरी ज्ञात कीजिए, जहाँ तक एक क्षैतिज सुरंग के अंदर एक पत्थर को 80 m/sec प्रक्षेप्य वेग के साथ 10 मीटर ऊँचाई तक फेंका जा सकता है। 3

- (ख) एक सरल लोलक की गति लीजिए। रैखिक और अरैखिक दोनों निदर्शों के लिए प्रारम्भिक प्रतिबंधों $t = 0$ पर $\theta = \theta_0$ और $t = 0$ या $\frac{d\theta}{dt} = 0$ के अधीन सरल लोलक का अवकल समीकरण लिखिए। दोनों ही स्थितियों में आवर्त काल का व्यंजक दीजिए। 4

- (ग) दो अलग-अलग युक्तियों वाले दो खिलाड़ियों A और B की भुगतान आव्यूह निम्नलिखित है : 3

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A} \begin{bmatrix} 5 & -7 & -17 \\ 4 & 6 & -15 \\ 9 & 10 & -13 \end{bmatrix}$$

खेल का पलायन बिन्दु और मान ज्ञात कीजिए।