

**BACHELOR'S DEGREE
PROGRAMME (BDP)**

**Term-End Examination
December, 2020**

MTE-13 : DISCRETE MATHEMATICS

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

Note : Attempt **five** questions in all. Q. No. 7 is compulsory. Answer any **four** questions from Question Nos. 1-6. Calculators are not allowed.

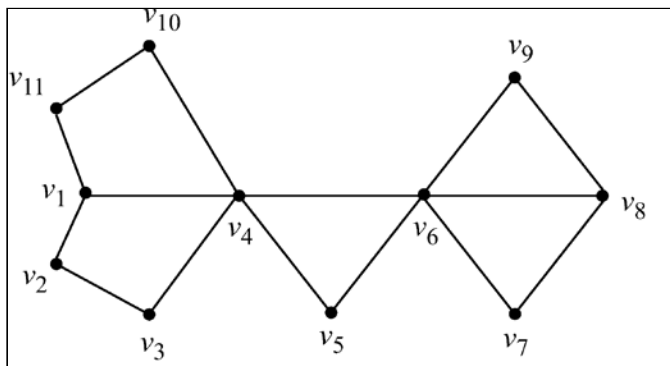
1. (a) Find the conjunctive normal form of the Boolean expression : 3

$$[(x_2 \wedge x_3') \vee (x_1' \wedge x_2)]'$$

- (b) A bag contains 7 green and 5 blue balls. Four balls are selected from the bag at random. Find the probability that at least three blue balls are selected. 3

- (c) Check whether or not the following graph is : 4

- (i) Hamiltonian
(ii) Eulerian



2. (a) Write the following argument in symbolic form : 3

“It will rain or I shall go to see a movie. It will not rain. Therefore, I shall go to see a movie.”

Also test the validity of this argument.

- (b) Solve the following recurrence relation : 5

$$a_{n+2} - 10a_{n+1} + 25a_n = 5^n \quad (n \geq 0)$$

- (c) Give an indirect proof of the following statement : 2

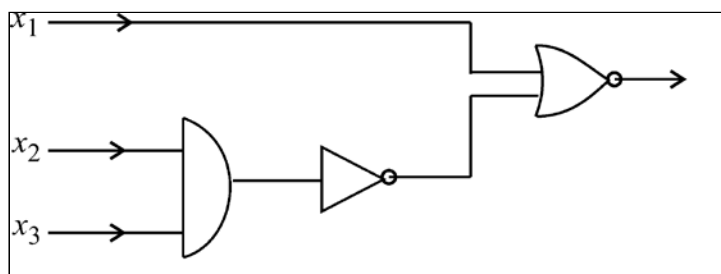
“It $x.y$ is odd, then both x and y are odd.”

3. (a) Find the generating function associated with the sequence $\{F_n\}_{n \geq 1}$, defined as : 3

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

for $n \geq 3$ and $F_1 = F_2 = 1$.

- (b) Write the Boolean expression for the following logic circuit : 2



- (c) In a college, B. A. first year class consists of 100 students. 40 students take Economics (EC), 40 take History (HS) and 40 take Political Science (PS). Further 20 students take EC and HS, 20 take EC and PS and 20 take HS and PS. Also 10 students take all the three subjects. Find the number of students who take none of these three subjects. 3
- (d) Write converse and contrapositive of the statement : 2

“For $n \in \mathbf{N}$, if $n \equiv 1 \pmod{9}$, there exist integers a and b such that $n = a^2 + b^2$.”

4. (a) Find the number of distinct integer solutions of the equation : 3

$$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 24$$

$$x_i \geq i \text{ and } 1 \leq i \leq 5.$$

- (b) Using generating functions, find : 5

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

- (c) Find the smallest cutset of $K_{3,5}$. 2

5. (a) Prove, by the principle of mathematical induction, that : 4

$$2^n > C(n, 3), \forall n \geq 3 (n \in \mathbf{N})$$

- (b) Express the polynomial, $x^4 + x^2 + x$ in terms of the factorial polynomials $[x]_4, [x]_3, [x]_2$ and $[x]_1$. 3

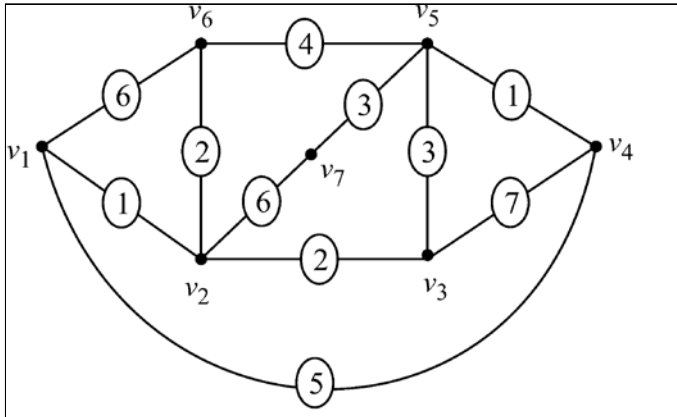
- (c) Using the method of telescopic sums, solve the recurrence relation : 3

$$(n+1)x_n - nx_{n-1} - \frac{n}{2}, x_0 = 10, n \geq 1$$

6. (a) Starting with the cycle : 3

$$\{v_1, v_4, v_3, v_2, v_7, v_5, v_6, v_1\}$$

carry out a reduction step to get a cycle of lesser weight in the following weighted graph :



- (a) Let C_n denote the number of n -tuples whose entries are 0 and 1 only and not two consecutive entries of which are zero. 5
- (i) Find C_1 and C_2 .
- (ii) Find a recurrence relation for C_n .
- (c) Obtain the edge-chromatic number of K_5 . 2
7. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answers. 10
- (i) If a statement has a direct proof, then it cannot have an indirect proof.

- (ii) Every subgraph of a graph, is an induced subgraph.
- (iii) The number of onto mappings from $\{a, b, c, d\}$ to $\{1, 2, 3, 4\}$ is $4!$.
- (iv) The Fibonacci sequence satisfies an inhomogeneous recurrence relation.
- (v) $x^2 + y^2 = z^2$, for $x, y, z \in \mathbf{R}$ is a proposition.

MTE-13**स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)****सत्रांत परीक्षा****दिसम्बर , 2020****एम.टी.ई.-13 : विविक्त गणित***समय : 2 घण्टे**अधिकतम अंक : 50*

नोट : कुल पाँच प्रश्न हल कीजिए। प्रश्न सं. 7 करना अनिवार्य है। प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटरों की अनुमति नहीं है।

1. (क) बूलीय व्यंजक : 3

$$[(x_2 \wedge x'_3) \vee (x'_1 \wedge x_2)]'$$

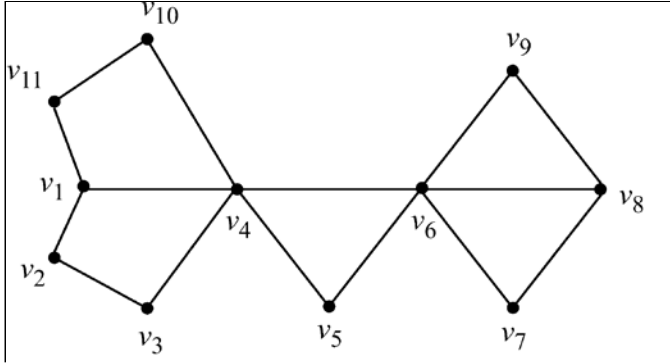
का संयोजनीय प्रसामान्य रूप ज्ञात कीजिए।

(ख) एक थैले में 7 हरी और 5 नीली गेंदें हैं। थैले में से 4 गेंदें यादृच्छया चुनी जाती हैं। इस बात का प्रायकिता बताइए कि कम से कम तीन नीली गेंदें चुनी जायें। 3

(ग) जाँच कीजिए कि क्या नीचे दिया गया ग्राफ 4

(i) हैमिल्टनी है

(ii) ऑयलरीय है



2. (क) निम्नलिखित तर्क को प्रतीक रूप में लिखिए : 3

“बारिश होगी या मैं फिल्म देखने जाऊँगा। बारिश नहीं होगी। इसलिए, मैं फिल्म देखने जाऊँगा।”

इस तर्क की वैधता भी जाँच कीजिए।

(ख) निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंध को हल कीजिए : 5

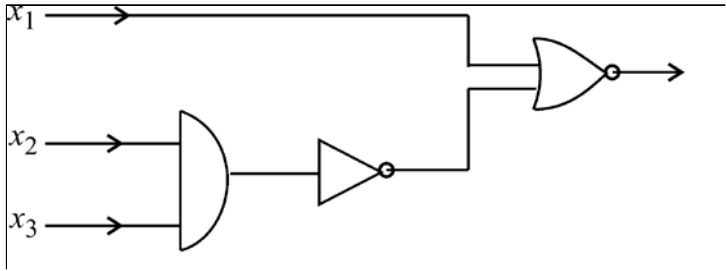
$$a_{n+2} - 10a_{n+1} + 25a_n = 5^n \quad (n \geq 0)$$

(ग) निम्नलिखित कथन की एक अप्रत्यक्ष उपपत्ति दीजिए : 2

“यदि x, y विषम है, तो दोनों x और y विषम हैं।”

3. (क) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 3$ के लिए और $F_1 = F_2 = 1$ से परिभाषित अनुक्रम $\{F_n\}_{n \geq 1}$ से संबंधित जनक फलन ज्ञात कीजिए। 3

- (ख) नीचे दिए गए तर्क परिपथ के लिए बूलीय व्यंजक लिखिए : 2



- (ग) एक महाविद्यालय में, बी. ए. प्रथम वर्ष की कक्षा में 100 छात्र हैं। 40 छात्र अर्थशास्त्र (EC) लेते हैं, 40 इतिहास (HS) लेते हैं और 40 छात्र राजनीतिक विज्ञान (PS) लेते हैं। इसके अतिरिक्त, 20 छात्र EC और HS दोनों लेते हैं, 20 छात्र EC और PS दोनों लेते हैं, और 20 छात्र HS और PS लेते हैं। और, 10 छात्र तीनों विषय लेते हैं। ऐसे छात्रों की संख्या बताइए जो इन तीनों विषयों में से कोई भी नहीं लेते। 3

(घ) निम्नलिखित कथन का विलोम और प्रतिस्थितक लिखिए : 2

“ $n \in \mathbf{N}$ के लिए, यदि $n \equiv 1 \pmod{9}$, तो ऐसे पूर्णांक a और b का अस्तित्व है कि $n = a^2 + b^2$ हो। ”

4. (क) समीकरण : 3

$$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 24$$

$x_i \geq i$ और $1 \leq i \leq 5$ के विभिन्न पूर्णांक हलों की संख्या ज्ञात कीजिए।

(ख) जनक फलनों के प्रयोग से : 5

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

(ग) $K_{3,5}$ का लघुतम काट-समुच्चय ज्ञात कीजिए। 2

5. (क) गणितीय आगमन के सिद्धान्त का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि : 4

$$2^n > C(n, 3), \forall n \geq 3 (n \in \mathbf{N})$$

(ख) बहुपद $x^4 + x^2 + x$ को क्रमगुणित बहुपदों $[x]_4, [x]_3, [x]_2$ और $[x]_1$ के रूप में व्यक्त कीजिए। 3

(ग) अंतःस्पर्शी योगफल विधि से, पुनरावृत्ति संबंध :

$$(n + 1) x_n - n x_{n-1} = \frac{n}{2}, x_0 = 10, n \geq 1$$

को हल कीजिए।

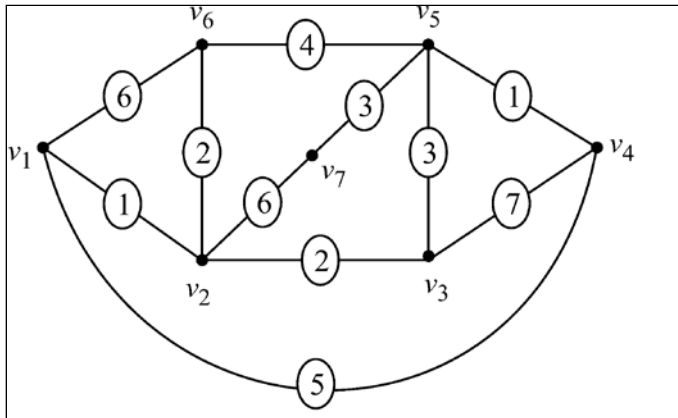
3

6. (क) चक्र :

3

$$\{v_1, v_4, v_3, v_2, v_7, v_5, v_6, v_1\}$$

से प्रारम्भ करके और लघुकरण चरण को एक बार लागू करके अपेक्षाकृत कम भार वाला चक्र प्राप्त कीजिए।



(ख) मान लीजिए C_n उन n -अंक की संख्याओं की संख्या है, जिनकी प्रविष्टियाँ केवल 0 और 1 हैं,

और जिनमें कोई भी दो क्रमागत प्रविष्टियाँ 0 नहीं हैं।

(i) C_1 और C_2 ज्ञात कीजिए। 5

(ii) C_n के लिए एक पुनरावृत्ति संबंध ज्ञात कीजिए। 2

(ग) K_5 की कोर-वर्णिक संख्या प्राप्त कीजिए। 2

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए : 10

(i) यदि किसी कथन की प्रत्यक्ष उपपत्ति है तो इसकी अप्रत्यक्ष उपपत्ति नहीं हो सकती।

(ii) किसी ग्राफ का प्रत्येक उपग्राफ एक प्रेरित उपग्राफ होता है।

(iii) (a, b, c, d) से $\{1, 2, 3, 4\}$ पर आच्छादक फलनों की संख्या $4!$ है।

(iv) फिबोनाशी अनुक्रम एक असमघात पुनरावृत्ति संबंध को संतुष्ट करता है।

(v) $x, y, z \in \mathbf{R}$ के लिए, $x^2 + y^2 - z^2$ एक कथन है।