

No. of Printed Pages : 12

BMTC-131

**BACHELOR OF SCIENCE/BACHELOR
OF ARTS**

Term-End Examination

December, 2020

BMTC-131 : CALCULUS

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 100

Note : (i) *All questions/parts of the questions of Section A and Section B are compulsory.*

(ii) *Attempt any **five** questions from Section C.*

(iii) *Use of calculator is not allowed.*

Section—A

1. Which of the following statements are true and which are false ? Give a short proof or a counter-example, whichever is appropriate in support of your answer : 20

(i) A cubic equation with real coefficients has at least one real root.

(ii) If A and B are two sets, then :

$$A \cup B = B \cup (A/B)$$

- (iii) Curve $y(x^2 + 1) = 3$ has an oblique asymptote.
- (iv) The greatest integer function is continuous on \mathbf{R} .
- (v) A critical point of a function is its extremum point.
- (vi) The maximum possible domain of a function f , given by :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

is $]0, 1[$.

(vii) $\frac{d}{dx}(\sin(x^2)) = \frac{d}{dx}(\sin^2 x)$

(viii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^x} - 1 \right) = -1$

(ix) $\frac{d}{dx} \left(\int_1^{x^4} \sec t \, dt \right) = 4x^2 \sec(x^4)$

- (x) The function f , defined by $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, is integrable on every finite sub-interval in \mathbf{R} .

Section—B

2. (a) Evaluate the following integral : 4

$$\int \frac{(x-2)}{x^2-6x+10} dx$$

- (b) Find $\frac{dy}{dx}$ for the following cases : 6

(i) $y = [x + (x + \sin^2 x)^3]^4$

(ii) $x^4 + y^4 = 16$

3. (a) Evaluate the following integrals : 6

(i) $\int_1^9 \frac{(2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1)}{t^2} dt$

(ii) $\int_0^{3\pi/2} |\sin x| dx$

- (b) Find $\frac{dy}{dx}$, when $y = x^x + xe^x$. 4

4. (a) Find all the roots α , β , γ of the cubic equation $x^3 - 7x - 6 = 0$. Also, find the equation whose roots are $\alpha + \beta$, $\beta + \gamma$ and $\alpha + \gamma$. 5

(b) If : 5

$$y = x^3 \cos x ,$$

then find the n th derivative of y .

Section—C

5. Trace the curve : 10

$$y = \frac{x}{x-1},$$

stating all the properties you use to trace it.

6. (a) Let : 6

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}.$$

Find :

(i) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

(iii) Does $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ exist ? Why, or why not ?

(iv) Sketch the rough graph of f .

(b) Is : 4

$$\left[\left(\frac{2-i}{1+i} - \frac{i}{2+i} \right) 3i \right]$$

a purely imaginary number ? Give reasons for your answer. Also, represent this number in an Argand plane.

7. (a) Find the area enclosed by the line $y = x - 1$ and the parabola $y^2 = 2x + 6$. 4

- (b) Evaluate : 3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1 - 4x}{x^2}$$

- (c) For which values of the constant C is the function f continuous on \mathbf{R} , where f is defined by : 3

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2 + 2x, & \text{if } x < 2 \\ x^3 - Cx, & \text{if } x \geq 2 \end{cases}$$

8. (a) Find the perimeter of the cardioid $r = 1 + \sin \theta$. 5

- (b) Using the $\epsilon - \delta$ definition of limit, prove that : 5

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^3 - 2x = -1$$

9. (a) Check whether the relation : 4

$$R = \{(x, y) \mid xy \text{ is the square of an integer, } x, y \in \mathbf{N}\}$$

is an equivalence relation or not.

(b) If f and g are functions, defined by :

$$f(x) = \sqrt{x}$$

and $g(x) = \sqrt{2-x}$,

define each of the following functions and their respective domains : 6

(i) $f \circ g$

(ii) $g \circ f$

(iii) $f \circ f$

(iv) $g \circ g$

10. (a) Expand e^{2x} in powers of $(x - 1)$ upto four terms. 5

(b) Verify Rolle's theorem for the function f , defined by $f(x) = x(x - 2)e^{-x}$ on the interval $[0, 2]$. 5

BMTC-131

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

[बी. एस-सी. (जी)/ बी.ए. (जी)]

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2020

बी.एम.टी.सी.-131 : कलन

समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : 100

-
- नोट :** (i) भाग 'अ' और भाग 'ब' के सभी प्रश्न/प्रश्नों के सभी भाग अनिवार्य हैं।
- (ii) भाग 'स' से कोई पाँच प्रश्न कीजिए।
- (iii) कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।
-

भाग—अ

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं? अपने उत्तर के पक्ष में एक संक्षिप्त उपपत्ति या प्रति उदाहरण दीजिए : 20
- (i) वास्तविक गुणाकों वाली एक त्रिघात समीकरण का कम से कम एक वास्तविक मूल होता है।

(ii) यदि A और B दो समुच्चय हैं, तो

$$A \cup B = B \cup (A/B) \text{ होगा।}$$

(iii) वक्र $y(x^2 + 1) = 3$ की एक तिर्यक अनंतस्पर्शी है।

(iv) अधिकतम पूर्णांक फलन, \mathbf{R} पर संतत होता है।

(v) एक फलन का क्रान्तिक बिन्दु उसका चरम बिन्दु होता है।

(vi) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ द्वारा परिभाषित फलन f का

अधिकतम सम्भव प्रांत $]0, 1[$ है।

$$(vii) \frac{d}{dx}(\sin(x^2)) = \frac{d}{dx}(\sin^2 x)$$

$$(viii) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^x} - 1 \right) = -1$$

$$(ix) \frac{d}{dx} \left(\int_1^{x^4} \sec t \, dt \right) = 4x^2 \sec(x^4)$$

(x) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ द्वारा परिभाषित फलन f , \mathbf{R} के

प्रत्येक उपअंतराल में समाकलनीय है।

भाग—ब

2. (क) निम्नलिखित समाकल परिकलित कीजिए : 4

$$\int \frac{(x-2)}{x^2-6x+10} dx$$

- (ख) निम्नलिखित के लिए $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए : 6

(i) $y = [x + (x + \sin^2 x)^3]^4$

(ii) $x^4 + y^4 = 16$

3. (क) निम्नलिखित समाकल परिकलित कीजिए : 6

(i) $\int_1^9 \frac{(2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1)}{t^2} dt$

(ii) $\int_0^{3\pi/2} |\sin x| dx$

- (ख) $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, जबकि $y = x^x + xe^x$ । 4

4. (क) त्रिघात समीकरण $x^3 - 7x - 6 = 0$ के सभी मूल α, β, γ निकालिए। वह समीकरण भी ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\alpha + \beta, \beta + \gamma$ और $\alpha + \gamma$ हैं।

5

- (ख) यदि $y = x^3 \cos x$ है, तो y का n वाँ अवकलज ज्ञात कीजिए। 5

भाग—स

5. वक्र : 10

$$y = \frac{x}{x-1}$$

का अनुरेखण कीजिए। अनुरेखण में प्रयोग किये गये सभी गुणधर्म भी लिखिए।

6. (क) मान लीजिए :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$$

है। ज्ञात कीजिए : 6

(i) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

(iii) क्या $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ का अस्तित्व है? क्यों या क्यों नहीं?

(iv) f का अनुमानित ग्राफ खींचिए।

(ख) क्या :

$$\left[\left(\frac{2-i}{1+i} - \frac{i}{2+i} \right) 3i \right]$$

एक पूर्णतः अधिकल्पित संख्या है? अपने उत्तर का कारण दीजिए। इस संख्या को आरगां समतल पर भी दर्शाइए। 4

7. (क) रेखा $y = x - 1$ और परवलय $y^2 = 2x + 6$ द्वारा घिरा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 4

(ख) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1 - 4x}{x^2}$ का मूल्यांकन कीजिए। 3

(ग) नियत C के किन मानों के लिए फलन f, \mathbf{R} पर सतत् है? f निम्नलिखित द्वारा परिभाषित है : 3

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2 + 2x, & \text{यदि } x < 2 \\ x^3 - Cx, & \text{यदि } x \geq 2 \end{cases}$$

8. (क) हृदयाभ $r = 1 + \sin \theta$ की परिमाप ज्ञात कीजिए। 5

(ख) सीमा की $\epsilon - \delta$ परिभाषा का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि : 5

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^3 - 2x = -1$$

9. (क) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित संबंध \mathbf{R} एक तुल्यता संबंध है या नहीं : 4

$\mathbf{R} = \{(x, y) \mid xy \text{ एक पूर्णांक का वर्ग है, जहाँ}$

$x, y \in \mathbf{N}\}$

(ख) यदि दो फलन f और g क्रमशः :

$$f(x) = \sqrt{x}$$

और $g(x) = \sqrt{2-x}$

द्वारा परिभाषित हैं, तो निम्नलिखित फलन को परिभाषित कीजिए और उनके क्रमशः प्रांत भी निकालिए :

6

(i) $f \circ g$

(ii) $g \circ f$

(iii) $f \circ f$

(iv) $g \circ g$

10. (क) e^{2x} का $(x-1)$ की घातों में चार पदों तक विस्तार कीजिए।

5

(ख) $f(x) = x(x-2)e^{-x}$ द्वारा परिभाषित फलन f के लिए अंतराल $[0, 2]$ पर रैले प्रमेय सत्यापित कीजिए।

5