No. of Printed Pages : 8 M07635 **MTE-02**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination, December 2019

Elective Course : MATHEMATICS

MTE-02 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 Hours] *[Maximum Marks : 50*
(Weightage : 70%)

Note : (i) Question No. 7 is Compulsory.
(ii) Answer ***any four*** *questions from questions* **1** *to* **6**.
(iii) Use of calculators is **not** *allowed.*

1. a) Show that $W=\{(x,-3x,2x)|x\in\mathbb{R}\}$ is a subspace of $\mathbb{R}^3$. Also find a basis for subspace U of $\mathbb{R}^3$ which satisfies $\mathbb{R}^3 = W \oplus U$. 5

b) Find the dual basis of $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ in $\mathbb{R}^3$. 5

2. a) If $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is a linear transformation with matrix $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ with respect to the standard basis of $\mathbb{R}^3$, find A^{-1} using the row-reduction method. Hence find T^{-1}. 4

b) Find the determinant rank of the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & -8 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$ 4

c) Consider the relation $\sim$ in $\mathbb{R}^2$ given by '$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ iff $x_1 x_2 - y_1 y_2 = 1$'. Check if $\sim$ is an equivalence relation. 2

3. a) Find the inverse of $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, using the Cayley-Hamilton theorem. 5

b) Obtain the rank of the quadratic form

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$. 3

c) Check whether or not $*$ is a binary operation on $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$, where $x * y = |\ln(xy)|$ 2

4. a) Let $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 3

and B = $P^{-1}AP$.

i) Do A and B have the same Eigen values. Justify your answer.

ii) If they have the same Eigen values, show that if v is an Eigen vector of B, then w = Pv is an Eigen vector of A. If A and B do not have the same Eigen values, then obtain Adj (A).

b) Find an orthonormal basis of $\mathbb{R}^3$, of which $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$ is one element. 4

c) If P_n denotes the vector space of all polynomials of degree $\leq n$, give two linearly independent elements of P_4 / P_2. 3

5. a) Find the minimal polynomial of $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, defined by $T(a, b, c) = (a - b, b, c)$ 3

b) Find the orthogonal and normal canonical reductions of the quadratic form $7x_1^2 + 6x_1x_2 + 7x_2^2$. Hence identify the conic represented by $7x_1^2 + 6x_1x_2 + 7x_2^2 = 200$. Also find the principal axes of the given quadratic form. 7

6. a) Find the vector equation of the plane determined by the points (1, –2, 1), (1, 0, 1) and (1, –1, 1). Also check whether $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ lies on it. 3

b) Show that $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : T(x, y, z) = (2x + y - z, x + z)$ is a linear transformation. Verify that T satisfies the Rank-Nullity theorem. 7

7. Which of the following statements are true? Give reasons for your answers in the form of a short proof or a counter example. 10

   i) If all the Eigen values of a matrix are real, then the matrix must be symmetric.

   ii) If V and W are real vector spaces, with $T : V \to W$ being a linear transformation then $V/_{\ker T} \simeq W$.

   iii) There are at least three different unitary matrices of order 2.

   iv) There are two subspaces U and W of $\mathbb{R}^3$ such that $U \cap W$ is empty.

   v) If the determinant of a matrix is zero, then the matrix cannot be diagonalised.

✧✧✧✧✧✧

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा,

दिसंबर 2019

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-02 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे] *[अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट : *(i) प्रश्न संख्या 7 करना **अनिवार्य** है।*

*(ii) प्रश्न संख्या 1 से 6 तक में से **किन्हीं चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

(iii) कैलकुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

---

1. क) दिखाइए कि $W=\{(x,-3x,2x)|x\in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}^3$ की एक उपसमष्टि है। $\mathbb{R}^3$ की उपसमष्टि U, जो $\mathbb{R}^3 = W \oplus U$ को संतुष्ट करती है का आधार भी ज्ञात कीजिए। 5

ख) $\mathbb{R}^3$ में {(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)} का द्वैत आधार ज्ञात कीजिए। 5

2. क) यदि $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ रैखिक रूपांतरण है जिसका $\mathbb{R}^3$ के मानक आधार के सापेक्ष आव्यूह $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ है, तब पंक्ति समानयन विधि से A^{-1} ज्ञात कीजिए। इस तरह T^{-1} ज्ञात कीजिए। 4

ख) निम्नलिखित आव्यूह की सारणिक कोटि ज्ञात कीजिए।

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & -8 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$ 4

ग) '$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ यदि और केवल यदि $x_1x_2 - y_1y_2 = 1$' द्वारा दिए गए $\mathbb{R}^2$ में संबंध ~ लीजिए। जाँच कीजिए कि क्या ~ तुल्यता संबंध है। 2

3. क) कैली-हैमिल्टन प्रमेय द्वारा

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए। 5

ख) द्विघाती समघात $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ की जाति प्राप्त कीजिए। 3

ग) जाँच कीजिए कि $*$, $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ पर द्वि-आधारी संक्रिया है या नहीं, जहाँ $x * y = |ln\ (xy)|$ 2

4. क) मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = P^{-1}AP$ 3

i) क्या A और B के आइगेन मान समान हैं? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

ii) यदि इनके आइगेन मान समान है, तो दिखाइए कि यदि v, B का आइगेन सदिश है, तब $w = Pv$, A का आइगेन सदिश है। यदि A और B के आइगेन मान समान नहीं है, तब Adj (A) प्राप्त कीजिए।

ख) $\mathbb{R}^3$ का एक ऐसा प्रसामान्य लांबिक आधार ज्ञात कीजिए जिसमें $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$ एक अवयव हो। 4

ग) यदि P_n घात $\leq n$ के सभी बहुपदों की सदिश समष्टि को निरूपित करता है, तब P_4/P_2 के दो रैखिकतः स्वतंत्र अवयव दीजिए। 3

5. क) रैखिक रूपांतरण $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ के अल्पिष्ठ बहुपद ज्ञात कीजिए जो $T(a, b, c) = (a - b, b, c)$ द्वारा परिभाषित है। 3

ख) द्विघाती समघात $7x_1^2 + 6x_1x_2 + 7x_2^2$ के लांबिक और प्रसामान्य विहित समानयन ज्ञात कीजिए। इस तरह $7x_1^2 + 6x_1x_2 + 7x_2^2 = 200$ द्वारा निरूपित शांक्व पहचानिए। दिए गए द्विघाती समघात के मुख्य अक्ष भी ज्ञात कीजिए। 7

6. क) बिन्दुओं $(1, -2, 1)$, $(1, 0, 1)$ और $(1, -1, 1)$ द्वारा निर्धारित समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए। यह भी जाँच कीजिए कि क्या $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ उस समतल पर स्थित है? 3

ख) दिखाइए कि $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : T(x, y, z) = (2x + y - z, x + z)$ रैखिक रूपांतरण है। सत्यापित कीजिए कि T जाति–शून्यता प्रमेय को संतुष्ट करता है। 7

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं? लघु-उपपति या प्रति-उदाहरण द्वारा अपने उत्तरों के कारण बताइए। 10

i) यदि आव्यूह के सभी आइगेन मान वास्तविक हो तो आव्यूह सममित होगा।

ii) यदि V और W वास्तविक सदिश समष्टियाँ है और $T : V \to W$ रैखिक रूपांतरण है, तब $V/_{\ker T} \simeq W$

iii) कोटि 2 के कम से कम तीन अलग-अलग ऐकिक आव्यूह होते हैं।

iv) $\mathbb{R}^3$ की ऐसी दो उपसमष्टियाँ U और W है जिनके लिए $U \cap W$ रिक्त है।

v) यदि आव्यूह का सारणिक शून्य है, तो आव्यूह विकर्णनीय नहीं हो सकता है।

✧✧✧✧✧✧