No. of Printed Pages : 12

MTE-14

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2018

00562

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Answer any **five** questions. All questions carry equal marks. Use of calculators is **not** allowed.*

1. (a) Gas is emitted at a rate of 260 g/sec from a stack with an effective height of 80 m. The wind velocity at the stack is 6 m/sec and the atmospheric class is D for the overcast day. Determine the ground level concentration along the centre line at a distance 900 m from a stack in micrograms per cubic metre. (Given $\sigma_y = 69$ m and $\sigma_z = 29{\cdot}5$ m are the standard deviations in the vertical and cross wind direction respectively.) *3*

(b) For the cubic total cost function

$$C = 0{\cdot}04q^3 - 0{\cdot}8q^2 + 10q + 5,$$

assume that the price of q is 13 per unit. Find the output which yields maximum profit. *4*

(c) Derive Poiseuille's law using dimensional analysis. *3*

2. (a) Discuss the static and dynamic stability for the following demand and supply functions : 3

$$D_t = -0{\cdot}8p_t + 60$$

$$S_t = -0{\cdot}7p_t + 40$$

(b) Write the limitations of the Malthusian model of population growth. 2

(c) The model for the number of infectives y of a population affected by the spread of a non-fatal disease results in a differential equation

$$\frac{dy}{dt} = y(N\beta - \gamma - \beta y),\ y(0) = y_0,$$

where N is the total population at time t, y_0 the initial infected population, γ the recovery rate and β the contact rate and N, y_0, γ and β are all constants. Solve for y and then show that the epidemic converges exponentially to the stable state. 5

3. (a) The populations x(t) and y(t) satisfy the model equations :

$$\frac{dx}{dt} = 14x - 2x^2 - xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 16y - 2y^2 - xy$$

Determine the critical points of the system and discuss the type of stability at critical points. Which critical point represents the possibility of co-existence of the two populations ? 6

(b) The sale in a store since 1998 is given below :

Year	Sale (in lacs)
1998	8
1999	10
2000	7
2001	11
2002	12
2003	9

Find the least square trend equation using 1998 as the zero year. *4*

4. (a) At any instant, a particle is projected with a velocity u making an angle α with the horizontal direction. After a certain interval t, the direction of the path makes an angle β with the horizontal direction. Prove that

$$u \cos \alpha = gt/(\tan \alpha - \tan \beta).$$

Also prove that the direction of motion turns through an angle θ in time

$$t = \frac{u \sin \theta}{g \cos(\theta - \alpha)}.$$ *5*

(b) If the per capita rate of a population growth be constant, discuss the behaviour of the population at any time t depending on the constant being positive or negative. *5*

5. (a) Consider the pay-off table for two players as given below :

		Player B		
		1	2	3
Player A	1	−4	−2	6
	2	3	0	4
	3	6	−3	−5

(i) Find the saddle point and the value of the game.

(ii) Give two equivalent linear programming problems for the above case. *6*

(b) In a mall, customers arrive according to Poisson distribution at an average of 10 customers per hour. The mall's waiting room can accommodate a maximum of 8 customers. The attending time per customer is an exponential distribution with mean rate of 15 per hour.

Find the : *4*

(i) effective arrival time of customers at the mall.

(ii) probability that an arriving customer does not have to wait.

(iii) probability that an arriving customer will find a vacant seat in the waiting room.

6. (a) Return distribution of two securities are given below :

Event	Chance $p_{1j} = p_{2j}$	Return	
		R_{1j}	R_{2j}
1	0·33	16	14
2	0·25	12	8
3	0·17	8	5
4	0·25	11	9

Find the correlation coefficient ρ_{12} of the two securities. What does the value of ρ_{12} suggest about the shape of the curve representing the set of portfolios of the two securities ? *6*

(b) A particle executes SHM. Its velocities are 8 cm/sec and 6 cm/sec when it is at distances 3 cm and 4 cm, respectively, from the mean position. Find the time period and maximum acceleration. *4*

7. (a) Consider the arterial blood viscosity $\mu = 0{\cdot}025$ poise. If the length of the artery is 2·5 cm, radius 8×10^{-3} cm and $P = P_1 - P_2 = 4 \times 10^4$ dynes/cm^2, then find maximum peak velocity of blood and shear stress at the wall. *4*

(b) Consider the following PDE in three variables representing the process of diffusion and bulk motion :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y} + w\frac{\partial C}{\partial z} =$$

$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

Here the symbols have their usual meanings.

(i) Write the steady state form of the above equation.

(ii) In the steady state model, if the wind velocity is assumed to be in the x-direction only and the mass transfer due to bulk motion in the x-direction is much larger than that due to diffusion, write the simplified form of the above equation.

(iii) Verify that when diffusivities are same in all the directions

$$C = \frac{K}{x} \exp\left\{-\left[\frac{y^2}{D} + \frac{z^2}{D}\right]\frac{u}{4x}\right\}$$

where K is an arbitrary constant, satisfies the simplified equation obtained in (ii) above. *6*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2018

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-14 : गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

*नोट : किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।*

1. (क) 80 m की प्रभावी ऊँचाई वाली एक स्टैक से गैस 260 g/sec की दर से उत्सर्जित होती है । स्टैक पर पवन चाल 6 m/sec और बादल से आच्छादित दिन वायुमंडल वर्ग D है । स्टैक से 900 m की दूरी पर स्थित केन्द्रीय रेखा के अनुदिश माइक्रोग्राम प्रति घन मीटर में भूमि तल सांद्रण ज्ञात कीजिए । (दिया गया है $\sigma_y = 69$ m और $\sigma_z = 29{\cdot}5$ m क्रमश: ऊर्ध्व और क्रॉस पवन दिशा में मानक विचलन हैं ।) *3*

(ख) निम्नलिखित त्रिघात कुल लागत फलन लीजिए :

$$C = 0{\cdot}04q^3 - 0{\cdot}8q^2 + 10q + 5,$$

मान लीजिए कि q की कीमत 13 प्रति इकाई है । वह निर्गत ज्ञात कीजिए जिससे अधिकतम लाभ प्राप्त होता है । *4*

(ग) विमीय विश्लेषण का प्रयोग करके प्वाज़य नियम व्युत्पन्न कीजिए । *3*

2. (क) निम्नलिखित माँग और पूर्ति फलनों के लिए स्थैतिक और गतिक स्थायित्व की चर्चा कीजिए : 3

$$D_t = -0{\cdot}8p_t + 60$$

$$S_t = -0{\cdot}7p_t + 40$$

(ख) माल्थस के समष्टि संवृद्धि निदर्श की परिसीमाएँ लिखिए । 2

(ग) अघातक बीमारी के फैलने से प्रभावित होने वाली समष्टि में y संक्रामक व्यक्तियों का निदर्श अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dt} = y(N\beta - \gamma - \beta y),\ y(0) = y_0,$$

द्वारा प्राप्त होता है, जहाँ समय t पर N कुल समष्टि है, y_0 प्रारंभिक संक्रमित समष्टि, γ ठीक होने की दर और β संपर्क दर है और N, y_0, γ और β सभी अचर हैं । y के लिए हल प्राप्त कीजिए और फिर दिखाइए कि महामारी चरघातांकी रूप से स्थायित्व अवस्था के प्रति अभिसरित होती है । 5

3. (क) समष्टि x(t) और y(t) निम्नलिखित निदर्श समीकरणों को संतुष्ट करती हैं :

$$\frac{dx}{dt} = 14x - 2x^2 - xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 16y - 2y^2 - xy$$

निकाय के क्रांतिक बिंदु निर्धारित कीजिए और क्रांतिक बिंदुओं के स्थायित्व के प्रकार की चर्चा कीजिए । कौन-सा क्रांतिक बिंदु दो समष्टियों के सह-अस्तित्व की संभावना को निरूपित करता है ? 6

(ख) एक स्टोर में 1998 से होने वाली बिक्री नीचे दी गई है :

वर्ष	बिक्री (लाखों में)
1998	8
1999	10
2000	7
2001	11
2002	12
2003	9

1998 को मूल-बिंदु मानकर न्यूनतम वर्ग उपनति रेखा समीकरण ज्ञात कीजिए । 4

4. (क) किसी भी क्षण, एक कण को वेग u के साथ क्षैतिज दिशा के साथ कोण α बनाते हुए प्रक्षेपित किया जाता है । कुछ अन्तराल t के बाद पथ की दिशा क्षैतिज दिशा के साथ कोण β बनाती है । सिद्ध कीजिए कि

$$u \cos \alpha = gt/(\tan \alpha - \tan \beta).$$

यह भी सिद्ध कीजिए कि गति की दिशा समय

$$t = \frac{u \sin \theta}{g \cos(\theta - \alpha)}$$

में कोण θ के बराबर मुड़ जाती है । 5

(ख) यदि समष्टि संवृद्धि की प्रति व्यक्ति दर अचर है, तब अचर धनात्मक या ऋणात्मक होने के आधार पर किसी भी समय t पर समष्टि के व्यवहार की चर्चा कीजिए । 5

5. (क) नीचे दी गई दो खिलाड़ियों की भुगतान-सारणी लीजिए :

		खिलाड़ी B		
		1	2	3
खिलाड़ी A	1	−4	−2	6
	2	3	0	4
	3	6	−3	−5

(i) खेल का पल्याण बिंदु और मान ज्ञात कीजिए ।

(ii) उपर्युक्त खेल के लिए दो तुल्य रैखिक प्रोग्रामन समस्याएँ बताइए । *6*

(ख) एक मॉल में, उपभोक्ता प्वासों बंटन के अनुसार 10 उपभोक्ता प्रति घंटे की औसत दर से आते हैं । मॉल के प्रतीक्षा कक्ष में अधिकतम 8 उपभोक्ता बैठ सकते हैं । प्रत्येक उपभोक्ता के साथ लगने वाला समय 15 उपभोक्ता प्रति घंटा की औसत दर से एक चरघातांकी बंटन है ।

निम्नलिखित ज्ञात कीजिए : *4*

(i) मॉल में उपभोक्ताओं के आने की प्रभावी आगमन दर ।

(ii) इस बात की प्रायिकता कि आने वाले उपभोक्ता को प्रतीक्षा न करनी पड़े ।

(iii) इस बात की प्रायिकता कि आने वाले उपभोक्ता को प्रतीक्षा कक्ष में खाली सीट मिल जाए ।

6. (क) दो प्रतिभूतियों का प्रतिफल बंटन नीचे दिया गया है :

घटना	संयोग $p_{1j} = p_{2j}$	प्रतिफल	
		R_{1j}	R_{2j}
1	0·33	16	14
2	0·25	12	8
3	0·17	8	5
4	0·25	11	9

दोनों प्रतिभूतियों का सहसंबंध गुणांक ρ_{12} ज्ञात कीजिए । दोनों प्रतिभूतियों की निवेश सूचियों के समुच्चय को निरूपित करने वाले वक्र के आकार के बारे में ρ_{12} का यह मान क्या बतलाता है ? *6*

(ख) एक कण सरल आवर्त गति प्रदर्शित करता लीजिए । माध्य अवस्था से जब कण की दूरी 3 cm और 4 cm होती है, तो उसका वेग क्रमश: 8 cm/sec और 6 cm/sec होता है । आवर्त काल और अधिकतम त्वरण ज्ञात कीजिए । *4*

7. (क) धमनी रक्त श्यानता $\mu = 0{\cdot}025$ पॉयज़ लीजिए । यदि धमनी की लंबाई 2·5 cm, त्रिज्या 8×10^{-3} cm और $P = P_1 - P_2 = 4 \times 10^4$ dynes/cm^2 हो, तो रक्त का अधिकतम शिखर वेग और दीवार पर अपरूपण प्रतिबल ज्ञात कीजिए । *4*

(ख) तीन चरों में विसरण परिघटना और समष्टि गति को निरूपित करने वाला निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरण (PDE) लीजिए :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y} + w\frac{\partial C}{\partial z} =$$

$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

यहाँ प्रतीकों के सामान्य अर्थ हैं ।

(i) ऊपर दिए गए समीकरण का स्थायी अवस्था रूप लिखिए ।

(ii) स्थायी अवस्था निदर्श में, यदि पवन वेग केवल x-दिशा में हो और x-दिशा में समष्टि गति से होने वाला द्रव्यमान स्थानांतरण, विसरण से होने वाले स्थानांतरण से बहुत अधिक हो, तो ऊपर दिए गए समीकरण का सरल रूप लिखिए ।

(iii) सत्यापित कीजिए कि जब विसरणशीलताएँ सभी दिशाओं में समान होती हैं, तब

$$C = \frac{K}{x} \exp\left\{-\left[\frac{y^2}{D} + \frac{z^2}{D}\right]\frac{u}{4x}\right\}$$

जहाँ K एक स्वेच्छ अचर है, ऊपर (ii) में प्राप्त सरल समीकरण को संतुष्ट करता है । *6*