

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

December, 2018

01932

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-13 : DISCRETE MATHEMATICS**

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. 1 is compulsory. Answer any four questions from questions no. 2 to 7. Use of calculators is not allowed.*

1. Which of the following statements are *true*, and which are *false* ? Justify your answers with a short proof or a counter example. 10
- (i) The order of the non-homogeneous recurrence relation $a_n^2 = a_{n-1} + a_{n-2}^2 + n$ is 2^2 .
- (ii) The graph $K_{3,6}$ is Hamiltonian.
- (iii) Every natural number has a self-conjugate partition.

- (iv) The contrapositive of "If Venkat buys a new book, then Bano will not study MTE - 13" is "If Bano buys a new book, then Venkat will not study MTE - 13".
- (v) The expression $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_4)$ is in DNF.

2. (a) Simplify the Boolean expression

$$f(x_1, x_2, x_3) =$$

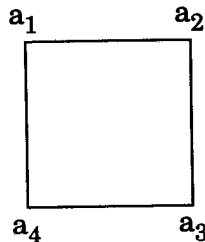
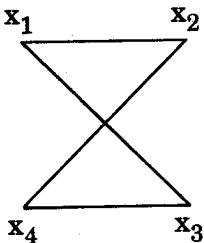
$$(x_1 \wedge x_3 \wedge x_4') \vee (x_1 \wedge x_2' \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge x_4')$$

and draw a circuit for the simplified expression. 4

(b) Find the general solution of the recurrence relation :

$$a_n - 4a_{n-1} + 5a_{n-2} - 2a_{n-3} = 1 + 2^n. \quad 6$$

3. (a) Check whether or not the following graphs are isomorphic. If so, state the isomorphism between them. 2



(b) How many distinct solutions of the linear equation, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$ are there which are

(i) in non-negative integers ?

(ii) in positive integers ?

Give reasons for your answers.

2

(c) Prove that every tree with two or more vertices is 2-chromatic.

2

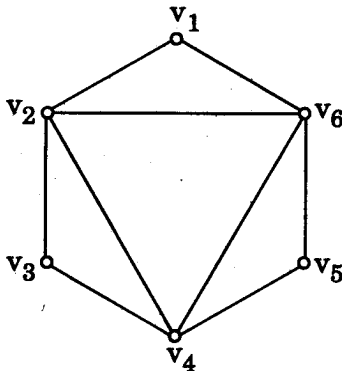
(d) Find the conjunctive normal form of the Boolean expression

$$f(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

4

4. (a) Show that the following graph is Eulerian by producing an Eulerian circuit in it.

2



(b) Show that $\sim(\sim(\sim p \wedge q) \vee \sim r) \equiv \sim p \wedge q \wedge r$,
without using the truth tables. 2

(c) A TV survey gives the following data for the
people watching TV programmes :

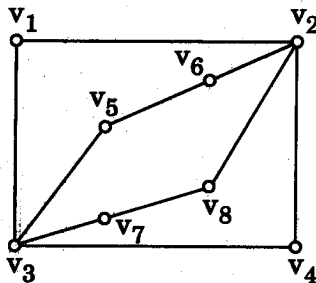
60% watch programme A, 50% watch
programme B, 47% watch programme C,
28% watch programmes A and B, 23% watch
programmes A and C, 18% watch
programmes B and C, and 8% watch all the
three programmes. What percentage do not
watch any programme ? 4

(d) If a book costs ₹ 150, a copy book costs ₹ 10
and a pen costs ₹ 5, write the generating
function for the number of ways of
purchasing all these items with ₹ n , where
 $n \in \mathbf{N}$. 2

5. (a) Using the generating functions, solve the
recurrence $a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 3^n$ for $n \geq 2$,
where $a_0 = 1$, $a_1 = 2$. 5

(b) A single card is drawn from a pack of
52 cards. What is the probability that it is
either a diamond or a face card ? 2

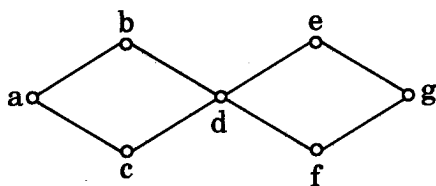
- (c) Show that the following graph has no Hamiltonian cycle. 3



6. (a) Using the principle of mathematical induction, prove that 25 is a factor of $7^{2n} + (2^{3(n-1)} \times 3^{n-1}) \forall n \in \mathbb{N}$. 4
- (b) If the recurrence $u_n + c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} = an + b$ has a general solution, $u_n = A3^n + B2^n + 5n - 1$, find a, b, c_1 and c_2 . 4
- (c) Prove that, given any 7 consecutive natural numbers, at least two numbers will yield the same remainder on division by 6. 2
7. (a) Express $3x^4 + 2x^3 + x$ in terms of $[x]_4$, $[x]_3$, $[x]_2$ and $[x]$. 5
- (b) State Euler's formula for a planar graph. Show that the number of edges in a connected planar graph with 20 vertices is at most 54. 3

(c) Find the edge connectivity of the following graph :

2



स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2018

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-13 : विविक्त गणित

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50
(कुल का : 70%)

नोट : प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं, और कौन-से असत्य? संक्षिप्त उपपत्ति या प्रत्युदाहरण द्वारा अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

10

- (i) असमघात पुनरावृत्ति संबंध $a_n^2 = a_{n-1} + a_{n-2} + n$ की कोटि 2^2 है।
- (ii) ग्राफ $K_{3,6}$ हैमिल्टनी है।
- (iii) प्रत्येक प्राकृत संख्या का एक स्वसंयुग्मी विभाजन होता है।

(iv) “यदि वेंकट एक नई पुस्तक खरीदता है, तो बानो MTE – 13 नहीं पढ़ेगी” का प्रतिस्थितिक “यदि बानो एक नई पुस्तक खरीदती है, तो वेंकट MTE – 13 नहीं पढ़ेगा” है ।

(v) व्यंजक $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_4)$ वियोजनीय प्रसामान्य समघात (DNF) में है ।

2. (क) बूलीय व्यंजक

$$f(x_1, x_2, x_3) =$$

$$(x_1 \wedge x'_3 \wedge x'_4) \vee (x_1 \wedge x'_2 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge x'_4)$$

को सरल कीजिए और सरल किए हुए व्यंजक के लिए तर्क परिपथ बनाइए ।

4

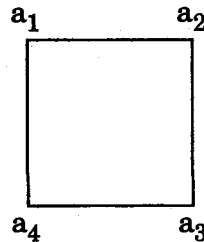
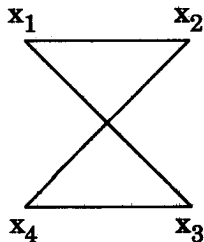
(ख) पुनरावृत्ति संबंध

$$a_n - 4a_{n-1} + 5a_{n-2} - 2a_{n-3} = 1 + 2^n \text{ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए ।}$$

6

3. (क) जाँच कीजिए कि नीचे दिए हुए ग्राफ तुल्यकारी हैं या नहीं । यदि तुल्यकारी हैं, तो इनके बीच तुल्यकारिता बताइए ।

2



(ख) रैखिक समीकरण $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$ के कितने भिन्न-भिन्न हल हैं जो कि

(i) ऋणोत्तर पूर्णांक हैं ?

(ii) धन पूर्णांक हैं ?

अपने उत्तरों के कारण दीजिए ।

2

(ग) सिद्ध कीजिए कि दो या दो से अधिक शीर्षों वाला प्रत्येक वृक्ष 2-वर्णिक होता है ।

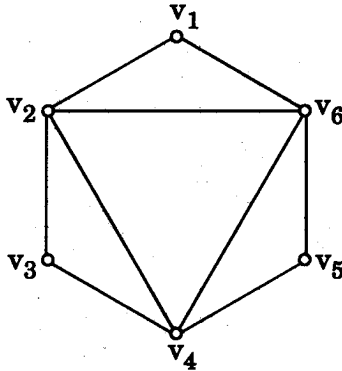
2

(घ) बूलिय व्यंजक $f(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ का संयोजनीय प्रसामान्य रूप ज्ञात कीजिए ।

4

4. (क) एक ऑयलरीय परिपथ बनाकर दिखाइए कि निम्नलिखित ग्राफ ऑयलरीय है ।

2



(ख) सत्य सारणी का प्रयोग किए बिना दिखाइए कि

$$\sim(\sim(\sim p \wedge q) \vee \sim r) \equiv \sim p \wedge q \wedge r. \quad 2$$

(ग) एक टी.वी. सर्वेक्षण में लोगों की टी.वी. देखने की आदत के आँकड़े निम्नलिखित हैं :

60% लोग कार्यक्रम A देखते हैं, 50% कार्यक्रम B देखते हैं, 47% कार्यक्रम C देखते हैं, 28% कार्यक्रम A और B देखते हैं, 23% कार्यक्रम A और C देखते हैं, 18% कार्यक्रम B और C देखते हैं और 8% लोग तीनों कार्यक्रम देखते हैं। बताइए कितने प्रतिशत लोग कोई भी कार्यक्रम नहीं देखते।

4

(घ) यदि एक पुस्तक की कीमत ₹ 150 है, एक कॉपी पुस्तक की कीमत ₹ 10 है, और एक पैन की कीमत ₹ 5 है, तो ₹ n में ये सभी वस्तुएँ खरीदने के तरीकों की संख्या के लिए जनक फलन लिखिए, जहाँ $n \in \mathbb{N}$ है।

2

5. (क) जनक फलन का प्रयोग करके पुनरावृत्ति

$$a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 3^n, n \geq 2 \text{ के लिए,}$$

हल कीजिए, जहाँ $a_0 = 1, a_1 = 2$ है।

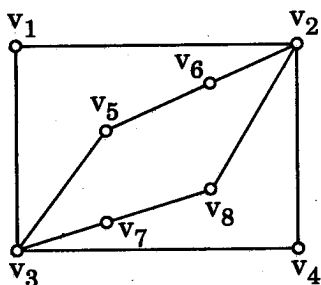
5

(ख) 52 पत्तों की ताश की गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। क्या प्रायिकता है कि यह एक ईंट का पत्ता है या गुलाम, बेगम या बादशाह वाला पत्ता है ?

2

- (ग) दिखाइए कि निम्नलिखित ग्राफ़ में कोई भी हैमिल्टनी चक्र नहीं है ।

3



6. (क) गणितीय आगमन नियम का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि 25 सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए $7^{2n} + (2^{3(n-1)} \times 3^{n-1})$ का गुणनखण्ड है ।

4

- (ख) यदि पुनरावृत्ति

$u_n + c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} = an + b$ का व्यापक हल $u_n = A3^n + B2^n + 5n - 1$ है, तो a, b, c_1 और c_2 के मान ज्ञात कीजिए ।

4

- (ग) सिद्ध कीजिए कि किन्हीं 7 क्रमागत प्राकृत संख्याओं में से कम-से-कम दो संख्याएँ ऐसी हैं जिनको 6 से भाग देने पर समान शेषफल प्राप्त होता है ।

2

7. (क) $3x^4 + 2x^3 + x$ को $[x]_4, [x]_3, [x]_2$ और $[x]$ के पदों में व्यक्त कीजिए ।

5

- (ख) समतलीय ग्राफ़ के लिए ऑयलर का सूत्र लिखिए । दिखाइए कि 20 शीर्षों वाले एक संबद्ध समतलीय ग्राफ़ में अधिकतम 54 कोरें होती हैं ।

3

(ग) निम्नलिखित ग्राफ का कोर संबद्धतांक ज्ञात कीजिए ।

2

