

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME  
(BDP)**

**Term-End Examination**

**December, 2018**

02292

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS  
MTE-11 : PROBABILITY AND STATISTICS**

*Time : 2 hours*

*Maximum Marks : 50*

*(Weightage : 70%)*

---

**Note :** *Question no. 7 is compulsory. Answer any four questions from questions no. 1 to 6. Use of calculators is not allowed.*

---

1. (a) The following data relate to the age of a group of employees. Calculate the mean and standard deviation :

5

<i>Age (in years)</i>	<i>No. of Employees</i>
50 – 55	25
45 – 50	30
40 – 45	40
35 – 40	45
30 – 35	80
25 – 30	110
20 – 25	170

- (b) Records taken from the number of male and female births in 800 families having four children are given below :

<i>No. of Births</i>		<i>Frequency</i>
<i>Male</i>	<i>Female</i>	
0	4	32
1	3	178
2	2	290
3	1	236
4	0	64

Test whether the data is consistent with the hypothesis that the binomial law holds for the chance of a male birth is equal to that of a female birth at the 5% level of significance. 5

[You may use the following values :

$$\chi^2_{4, 0.05} = 9.488, \chi^2_{5, 0.05} = 11.05,$$

$$\chi^2_{6, 0.05} = 12.59]$$

2. (a) The following results are available from an analysis of data :

Variance of X = 9, Regression equations :

$$8X - 10Y + 66 = 0 \text{ and } 40X - 18Y = 214.$$

Find the

- (i) Mean values of X and Y
- (ii) Correlation coefficient between X and Y
- (iii) Standard deviation of Y

4

(b) A person speaks the truth 4 out of 5 times. A die is tossed. He reports that there is a six. What is the probability that actually there was a six ?

3

(c) A random sample of size  $n$  is drawn from a uniform population over  $\left(\theta - \frac{1}{3}, \theta + \frac{1}{3}\right)$ .

Obtain maximum likelihood estimator of  $\theta$ .

3

3. (a) Use Chebychev's inequality to obtain the lower bound for  $P[-1 < X < 9]$ , if the  $E(X)$  and  $E(X^2)$  of  $X$  are 4 and 20, respectively.

3

(b) In a continuous distribution, the frequency density function is given by

$$f(x) = y_0 \cdot x(2 - x); 0 \leq x \leq 2$$

Find  $y_0$ , mean, variance, coefficients of skewness and kurtosis. Hence comment on the nature of the distribution.

7

4. (a) The joint distribution of  $X$  and  $Y$  is given by

$$f(x, y) = C xy e^{-(x^2 + y^2)}; x \geq 0, y \geq 0.$$

Find  $C$ . Test whether  $X$  and  $Y$  are independent. Also find the conditional density of  $X$  given  $Y = y$ .

6

- (b) For a distribution, the mean is 10 and variance is 16 and  $\sqrt{b_1} = +1$ , where  $b_1$  is Pearson's coefficient of skewness. Obtain the first three moments about origin. 4

5. (a) A random variable X denotes the distance (in thousands of km) covered by a certain kind of tyre having probability density function

$$f(x) = \frac{1}{20} e^{-\frac{x}{20}} ; x > 0$$

- Find the probabilities that the tyres will last (i) at most 10,000 km, and (ii) anywhere from 16,000 km to 24,000 km. 4

- (b) Show that

$$\frac{[\sum X_i (\sum X_i - 1)]}{n(n-1)}$$

- is an unbiased estimator of  $\theta^2$ , for the sample  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , drawn on X which takes the values 1 or 0 with respective probabilities  $\theta$  and  $(1 - \theta)$ . 4

- (c) Find the value of C if (X, Y) have the following joint probability mass function : 2

$$f(x, y) = C(x + y + 1), x = 0, 1, 2, 3 \text{ and } y = 0, 1, 2.$$

6. (a) Three bags I, II and III contain 1 white, 2 black and 3 red balls; 2 white, 1 black and 1 red balls; and 4 white, 5 black and 3 red balls, respectively. One bag is selected at random and two balls are drawn. These happen to be one white and one red. Find the probability that these balls were drawn from bag I.

3

(b) A random sample is to be drawn from a normal population with unknown mean  $\mu$  and known variance  $\sigma_0^2$  to construct a confidence interval with confidence coefficient 0.90 and length  $2\sigma_0$ . What should be the sample size ?

3

[Use  $Z_{\alpha/2} = 1.645$ ,  $\alpha = 10\%$ ]

(c) If  $x \geq 1$  is the critical region for testing  $H_0 : \theta = 2$  against the alternative  $H_1 : \theta = 1$  on the basis of the single observation from the population,

$$f(x, \theta) = \theta \exp(-\theta x); \theta \leq x < \infty,$$

obtain the values of type I and type II errors.

Also obtain the power of the test.

4

7. Which of the following statements are *true* or *false*? Give short proof or counter example in support of your answer. 5×2=10

- (a) The sum of the squares of deviations of observed values is minimum when taken about mean.
  - (b) The function defined as  $f(x) = 6x(1 - x)$ ;  $0 \leq x \leq 1$  is a probability density function.
  - (c) For binomial distribution, variance is more than mean.
  - (d) The sample mean is a consistent estimator of  $\mu$  for a normal population  $N(\mu, \sigma^2)$ .
  - (e) If a letter of the English alphabet is chosen at random, then the probability that the letter so chosen is a vowel will be  $\frac{1}{26}$ .
-

स्नातक उपाधि कार्यक्रम  
(बी.डी.पी.)  
सत्रांत परीक्षा  
दिसम्बर, 2018

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित  
एम.टी.ई.-11 : प्रायिकता और सांख्यिकी

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50  
(भारिता : 70%)

नोट : प्रश्न सं. 7 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटरो के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (क) निम्नलिखित आँकड़े कर्मचारियों के समूह की आयु से संबंधित हैं। माध्य और मानक विचलन परिकलित कीजिए :

5

आयु (वर्षों में)	कर्मचारियों की संख्या
50 - 55	25
45 - 50	30
40 - 45	40
35 - 40	45
30 - 35	80
25 - 30	110
20 - 25	170

- (ख) चार बच्चों वाले 800 परिवारों में पैदा होने वाले लड़कों और लड़कियों की संख्या के रिकॉर्ड निम्नलिखित हैं :

जन्मों की संख्या		बारंबारता
लड़के	लड़कियाँ	
0	4	32
1	3	178
2	2	290
3	1	236
4	0	64

परिकल्पना यह है कि द्विपद नियम के अनुसार लड़के व लड़कियों के पैदा होने की संख्या की संभावना समान है । 5% सार्थकता स्तर पर जाँच कीजिए कि यह परिकल्पना आँकड़ों के संगत है या नहीं ।

5

[आप निम्नलिखित मानों का प्रयोग कर सकते हैं :

$$\chi_{4, 0.05}^2 = 9.488, \chi_{5, 0.05}^2 = 11.05,$$

$$\chi_{6, 0.05}^2 = 12.59]$$

2. (क) आँकड़ों के विश्लेषण से निम्नलिखित परिणाम उपलब्ध हैं :

X का प्रसरण = 9, समाश्रयण समीकरण :

$$8X - 10Y + 66 = 0 \text{ और } 40X - 18Y = 214.$$

निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

- X और Y के माध्य मान
- X और Y के बीच सहसंबंध गुणांक
- Y का मानक विचलन

4



(ख) एक व्यक्ति 5 में से 4 बार सच बोलता है। एक पाँसा उछाला जाता है। वह बताता है कि इस पर छह आया है। इसकी प्रायिकता क्या है कि वास्तव में भी पाँसे पर छह था ? 3

(ग)  $\left(\theta - \frac{1}{3}, \theta + \frac{1}{3}\right)$  अंतराल पर एकसमान समष्टि से आमाम  $n$  का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श लिया गया।  $\theta$  का अधिकतम संभावित आकलक प्राप्त कीजिए। 3

3. (क) शेबीशेव असमिका का प्रयोग करके  $P[-1 < X < 9]$  के लिए निम्न परिबंध प्राप्त कीजिए, यदि  $X$  के  $E(X)$  और  $E(X^2)$  क्रमशः 4 और 20 हैं। 3

(ख) एक सतत बंटन का आवृत्ति घनत्व फलन निम्नलिखित है :

$$f(x) = y_0 \cdot x(2 - x); 0 \leq x \leq 2$$

$y_0$ , माध्य, प्रसरण, वैषम्यता और ककुदता गुणांक ज्ञात कीजिए। इस प्रकार बंटन की प्रकृति पर टिप्पणी कीजिए। 7

4. (क)  $X$  और  $Y$  का संयुक्त बंटन निम्नलिखित है :

$$f(x, y) = C xy e^{-(x^2 + y^2)}; x \geq 0, y \geq 0.$$

$C$  ज्ञात कीजिए। जाँच कीजिए कि  $X$  और  $Y$  स्वतंत्र हैं या नहीं?  $X$  का,  $Y = y$  दिया गया है, सप्रतिबंध घनत्व भी ज्ञात कीजिए। 6

- (ख) एक बंटन का माध्य 10 और प्रसरण 16 और  $\sqrt{b_1} = +1$  है, जहाँ  $b_1$  वैषम्यता का पियरसन गुणांक है। मूल के प्रति प्रथम तीन आघूर्ण प्राप्त कीजिए। 4

5. (क) एक यादृच्छिक चर  $X$ , जो एक विशेष प्रकार के पहिये द्वारा तय की गयी दूरी (हजार km में) दर्शाता है, का प्रायिकता घनत्व फलन निम्नलिखित है :

$$f(x) = \frac{1}{20} e^{-\frac{x}{20}} ; x > 0$$

वह प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पहिया :

- (i) अधिक-से-अधिक 10,000 km तक चलेगा और  
(ii) 16,000 km से 24,000 km तक चलेगा। 4

- (ख) दर्शाइए कि  $X$  से लिए गए प्रतिदर्श  $X_1, X_2, \dots, X_n$  के लिए,  $\theta^2$  का अनभिन्नत आकलक  $\frac{[\sum X_i (\sum X_i - 1)]}{n(n-1)}$

है।  $X$  की 0 और 1 मानों पर प्रायिकताएँ क्रमशः  $\theta$  और  $(1 - \theta)$  हैं। 4

- (ग)  $C$  का मान ज्ञात कीजिए यदि  $(X, Y)$  का संयुक्त प्रायिकता द्रव्यमान फलन निम्नलिखित है : 2

$$f(x, y) = C(x + y + 1), x = 0, 1, 2, 3 \text{ और } y = 0, 1, 2.$$

6. (क) तीन थैलों I, II और III में क्रमशः 1 सफ़ेद, 2 काली और 3 लाल गेंदें; 2 सफ़ेद, 1 काली और 1 लाल गेंदें; तथा 4 सफ़ेद, 5 काली और 3 लाल गेंदें हैं। एक थैले को यादृच्छया चुनकर उसमें से दो गेंदें निकाली जाती हैं। इनमें से एक गेंद सफ़ेद और एक गेंद लाल है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि ये गेंदें थैले I से ही निकाली गयी हैं।

3

- (ख) विश्वास्यता गुणांक 0.90 और लंबाई  $2\sigma_0$  वाला विश्वास्यता अंतराल निर्मित करने के लिए अज्ञात माध्य  $\mu$  और ज्ञात प्रसरण  $\sigma_0^2$  वाली प्रसामान्य समष्टि से एक यादृच्छिक प्रतिदर्श लिया जाता है। प्रतिदर्श का आमाप क्या होना चाहिए ?

3

$[Z_{\alpha/2} = 1.645, \alpha = 10\% \text{ का प्रयोग कीजिए}]$

- (ग) यदि समष्टि

$$f(x, \theta) = \theta \exp(-\theta x); \theta \leq x < \infty$$

से लिए गए एक प्रेक्षण के आधार पर विकल्प  $H_1 : \theta = 1$  के विरुद्ध  $H_0 : \theta = 2$  के परीक्षण के लिए क्रांतिक प्रदेश  $x \geq 1$  है, तो प्रकार I और प्रकार II की त्रुटियों के मान प्राप्त कीजिए। परीक्षण की क्षमता भी प्राप्त कीजिए।

4

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं अथवा असत्य ? अपने उत्तर के पक्ष में संक्षिप्त उपपत्ति या प्रत्युदाहरण दीजिए । 5×2=10

(क) प्रेक्षित मानों के विचलन के वर्गों का योगफल तभी न्यूनतम होता है जब इसे माध्य के सापेक्ष लिया जाता है ।

(ख)  $f(x) = 6x(1 - x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$  द्वारा परिभाषित फलन एक प्रायिकता घनत्व फलन है ।

(ग) द्विपद बंटन के लिए, प्रसरण, माध्य से अधिक होता है ।

(घ) एक प्रसामान्य समष्टि  $N(\mu, \sigma^2)$  के लिए प्रतिदर्श माध्य  $\mu$  का एक संगत आकलक होता है ।

(ङ) यदि अंग्रेजी वर्णमाला में से एक अक्षर यादृच्छया चुना जाता है, तो चुने हुए अक्षर के स्वर होने की प्रायिकता  $\frac{1}{26}$  है ।