No. of Printed Pages : 12 **MTE-10**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

01122 **December, 2018**

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Answer any **five** questions. All computations may be done upto 3 decimal places. Use of calculators is **not** allowed. Symbols have their usual meanings.*

1. (a) Using Newton's divided difference interpolation formula, find f(x) as a polynomial in x using the following table : *4*

x	f(x)
0	0
1	1
3	27
4	64
5	125
6	216

(b) If f_i is the value of f(x) at

$$x = x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

then prove that

$$f_i = E^i f_0 = \sum_{j=0}^{i} C(i, j)\, \Delta^j f_0. \qquad 4$$

(c) Use Euler's method to solve the IVP $y' = -y$, $y(0) = 1$ for $0 < x \leq 0{\cdot}02$ with $h = 0{\cdot}01$. 2

2. (a) Use composite trapezoidal rule to find

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}$$

with $h = 0{\cdot}5$ and $h = 0{\cdot}25$. Improve the accuracy by Romberg integration. 4

(b) Find a real root of the equation

$$f(x) = x^3 + x - 5 = 0$$

by the bisection method, correct to first decimal place. 4

(c) Show that the Newton-Raphson iteration scheme for computing $a^{\frac{1}{k}}$ is 2

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left[(k-1)\, x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right].$$

3. (a) Solve the following system of linear equations using LU factorization method : 5

$$2x + y + z = 3$$

$$x + 3y + z = -2$$

$$x + y + 4z = -6$$

Use $u_{11} = u_{22} = u_{33} = 1$.

(b) Find $y(0{\cdot}4)$ using the Runge-Kutta fourth order method for the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \; y(0) = 0.$$

Take $h = 0{\cdot}2$. 5

4. (a) From the data given below, find the number of students getting marks between 60 and 70 : 3

Marks	*No. of Students*
0 – 20	30
20 – 40	20
40 – 60	20
60 – 80	10

(b) The polynomial equation

$$9x^3 + 6x^2 + 6x + 4 = 0$$

has a root close to – 0·6. Find this root using two iterations of the Birge-Vieta method. Hence obtain the deflated polynomial and find the remaining roots. 7

5. (a) Perform three iterations of the power method to find the largest eigenvalue in magnitude and the corresponding eigenvector of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Assume $x_0 = (1, 1, 1)^T$. 5

(b) Determine the order of the convergence of the iterative method

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}\, f(x_n) - x_n\, f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

for finding a simple root of the equation $f(x) = 0$. 5

6. (a) Use Lagrange's interpolation method to estimate the value of f(3) from the following data : 3

x	f(x)
2	3
5	1
6	2
7	6

(b) Obtain the 8^{th} Taylor series expansion of the function

$$f(x) = \sin x \text{ in } \left[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \text{ about } x_0 = 0.$$

Obtain a bound for the error $R_9(x)$. 3

(c) Using Gershgorin bounds, find the estimates of the eigenvalues of the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad 4$$

7. (a) Perform two iterations of the Gauss-Seidel iteration scheme to approximate the roots of the system of equations :

$$x_1 + 3x_3 = 2$$

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 = -5$$

$$x_1 + 6x_2 + 2x_3 = -11$$

Take $x_1 = -0{\cdot}9$, $x_2 = -2{\cdot}1$, $x_3 = 0{\cdot}9$

as the initial approximation. *5*

(b) Determine the constants α, β, γ in the differentiation formula

$$y''(x_0) = \alpha\, y(x_0 - h) + \beta\, y(x_0) + \gamma\, y(x_0 + h)$$

so that the method is of the highest possible order. Find the order and the error term of the method. *5*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2018

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट : *किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी अभिकलन 3 दशमलव स्थानों तक दिए जा सकते हैं । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं ।*

1. (क) न्यूटन के विभाजित अंतर अंतर्वेशन सूत्र द्वारा निम्नलिखित तालिका का प्रयोग करते हुए x में बहुपद के रूप में f(x) ज्ञात कीजिए : *4*

x	f(x)
0	0
1	1
3	27
4	64
5	125
6	216

(ख) यदि f_i,

$$x = x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, 2, ...,$$

पर $f(x)$ का मान है, तब सिद्ध कीजिए कि

$$f_i = E^i f_0 = \sum_{j=0}^{i} C(i, j)\, \Delta^j f_0. \qquad 4$$

(ग) $h = 0{\cdot}01$ लेकर $0 < x \leq 0{\cdot}02$ के लिए आदि मान समस्या $y' = -y$, $y(0) = 1$ को ऑयलर विधि से हल कीजिए । 2

2. (क) संयुक्त समलंबी नियम से $h = 0{\cdot}5$ और $h = 0{\cdot}25$ के लिए

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}$$

ज्ञात कीजिए । रॉम्बर्ग समाकलन द्वारा परिशुद्धता में सुधार कीजिए । 4

(ख) समद्विभाजन विधि से समीकरण

$$f(x) = x^3 + x - 5 = 0$$

का पहले दशमलव स्थान तक की परिशुद्धता वाला वास्तविक मूल ज्ञात कीजिए । 4

(ग) दिखाइए कि $a^{\frac{1}{k}}$ परिकलित करने के लिए न्यूटन-रैफ्सन पुनरावृत्ति योजना निम्न है : 2

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left[(k-1)\, x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right]$$

3. (क) LU गुणनखंडन (वियोजन) विधि द्वारा निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए : 5

$$2x + y + z = 3$$

$$x + 3y + z = -2$$

$$x + y + 4z = -6$$

$u_{11} = u_{22} = u_{33} = 1$ का प्रयोग कीजिए ।

(ख) निम्नलिखित अवकल समीकरण के लिए रूंगे-कुट्टा चतुर्थ कोटि विधि से $y(0{\cdot}4)$ ज्ञात कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \; y(0) = 0.$$

$h = 0{\cdot}2$ लीजिए । 5

4. (क) निम्नलिखित आँकड़ों से 60 और 70 के बीच अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए : 3

अंक	*विद्यार्थियों की संख्या*
0 – 20	30
20 – 40	20
40 – 60	20
60 – 80	10

(ख) बहुपद समीकरण

$$9x^3 + 6x^2 + 6x + 4 = 0$$

का एक मूल $-0{\cdot}6$ के निकट है । बर्ज-विएटा विधि की दो पुनरावृत्तियाँ करके यह मूल ज्ञात कीजिए । इस तरह अपस्फीत बहुपद प्राप्त कीजिए और शेष मूल ज्ञात कीजिए । 7

5. (क) घात विधि की तीन पुनरावृत्तियाँ करके आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

का परिमाण में बृहत्तम आइगेनमान और संगत आइगेनसदिश ज्ञात कीजिए । मान लीजिए कि $x_0 = (1, 1, 1)^T$. 5

(ख) समीकरण $f(x) = 0$ का साधारण मूल ज्ञात करने के लिए पुनरावृत्ति विधि

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

की अभिसरण कोटि निर्धारित कीजिए । 5

6. (क) लग्रांज अंतर्वेशन विधि द्वारा निम्नलिखित आँकड़ों से f(3) के मान का आकलन कीजिए : *3*

x	f(x)
2	3
5	1
6	2
7	6

(ख) अंतराल $\left[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ में फलन $f(x) = \sin x$ का $x_0 = 0$ के प्रति 8वाँ टेलर श्रेणी प्रसार प्राप्त कीजिए । त्रुटि $R_9(x)$ का परिबंध प्राप्त कीजिए । *3*

(ग) गर्शगोरिन परिबंधों द्वारा आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

के आइगेनमान आकलित कीजिए । *4*

7. (क) समीकरण निकाय

$$x_1 + 3x_3 = 2$$

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 = -5$$

$$x_1 + 6x_2 + 2x_3 = -11$$

के मूलों के सन्निकटन के लिए गाउस-सीडल पुनरावृत्ति विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए ।

आदि सन्निकटन $x_1 = -0{\cdot}9$, $x_2 = -2{\cdot}1$, $x_3 = 0{\cdot}9$ लीजिए । 5

(ख) अवकलन सूत्र

$$y''(x_0) = \alpha\, y(x_0 - h) + \beta\, y(x_0) + \gamma\, y(x_0 + h)$$

के लिए अचर α, β, γ ज्ञात कीजिए जिससे कि विधि की कोटि अधिकतम संभव हो । विधि की कोटि और त्रुटि पद भी ज्ञात कीजिए । 5