

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

01602

December, 2018

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-08 : DIFFERENTIAL EQUATIONS**

Time : 2 hours

*Maximum Marks : 50
(Weightage : 70%)*

Note : Question no. 1 is compulsory. Answer any four questions out of questions no. 2 to 7. Use of calculators is not allowed.

1. State whether the following statements are *True* or *False*. Justify your answer with the help of a short proof or a counter-example. $5 \times 2 = 10$

(a) The differential equation of all circles passing through the origin and whose centres lie on the x-axis, is

$$2xyy' + x^2 - y^2 = 0.$$

(b) The differential equation

$(8y \, dx + 8x \, dy) + x^2y^3 (4y \, dx + 5x \, dy) = 0$
is exact.

- (c) The differential equation

$$\frac{dy}{dx} + 2xy + xy^4 = 0$$

is reducible to a linear differential equation.

- (d) The equation

$$yz \, dx + (x^2y - xz) \, dy + (x^2z - xy) \, dz = 0$$

is integrable.

- (e) The partial differential equation

$u_{tt} = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}$, where a, b, c are positive constants and $b^2 - ac = 0$, is irreducible.

2. (a) Solve :

5

$$(D^2 - DD' - 2D)z = \sin(3x + 4y) + e^{2x+y}$$

- (b) Use the method of variation of parameters to solve the following differential equation :

$$y'' - 2y' + y = \frac{12e^x}{x^3}.$$

5

3. (a) Observing that $y = x$, is a particular integral of $2x^2y'' + xy' - y = 0$, obtain its general solution.

3

- (b) The rate of change of the price P of a commodity is proportional to the difference between the demand D and the supply S . If $D = a - bP$ and $S = c \sin \beta t$, where a, b, c, β are constants, determine $P(t)$. It is given that at $t = 0$, $P = P_0$.

4

- (c) Find the general solution of the equation

$$(x - y) y^2 u_x - (x - y) x^2 u_y - (x^2 + y^2) u = 0.$$

3

4. (a) Solve the differential equation

$$(6xy - 3y^2 + 2y) dx + 2(x - y) dy = 0. \quad 3$$

- (b) Solve the following differential equation :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y + 1}. \quad 2$$

- (c) Find the integral surface of the PDE

$$x^2p + y^2q + z^2 = 0$$

which passes through the hyperbola

$$xy = x + y, \quad z = 1. \quad 5$$

5. (a) The surface temperature of a dead body changes at a rate proportional to the difference between the temperature of a body and that of the surrounding environment. The temperature of a dead body is 85° F when discovered and 74° F two hours later. If the surrounding temperature is 68° F, find the time when the body was discovered after death (take temperature of the body at the time of death as 98.6° F). 5

- (b) Solve : 3

$$x^2y'' - 2xy' - 4y = x^2 + 2 \ln x$$

- (c) Give an example of an elliptic partial differential equation of 2nd order, justifying your answer. 2

6. (a) Solve the equation

$$(7y - 3x + 3) dy + (3y - 7x + 7) dx = 0. \quad 3$$

- (b) Using the method of undetermined coefficients, solve the equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2. \quad 3$$

- (c) Using Charpit's method, solve the equation

$$zp^2 - y^2p + y^2q = 0. \quad 4$$

7. (a) Solve the Laplace equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

in the rectangle with $u(0, y) = 0$, $u(a, y) = 0$,
 $u(x, b) = 0$ and $u(x, 0) = f(x)$. 7

- (b) Solve the equation

$$6y^2 dx - x(2x^3 + y) dy = 0. \quad 3$$

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2018

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-08 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट : प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। संक्षिप्त उपपत्ति अथवा प्रत्युदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

5×2=10

(क) मूल-बिन्दु से गुज़रने वाले सभी वृत्तों, जिनके केन्द्र x-अक्ष पर स्थित हैं, का अवकल समीकरण

$$2xyy' + x^2 - y^2 = 0 \text{ है।}$$

(ख) अवकल समीकरण

$$(8y dx + 8x dy) + x^2y^3 (4y dx + 5x dy) = 0$$

यथातथ है।

(ग) अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + 2xy + xy^4 = 0$$

को एक रैखिक अवकल समीकरण में समानीत किया जा सकता है ।

(घ) अवकल समीकरण

$$yz dx + (x^2y - xz) dy + (x^2z - xy) dz = 0$$

समाकलनीय है ।

(ङ) आंशिक अवकल समीकरण

$u_{tt} = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}$, जहाँ a, b, c धनात्मक अचर हैं, असमान्य होता है जब $b^2 - ac = 0$ हो ।

2. (क) हल कीजिए :

5

$$(D^2 - DD' - 2D) z = \sin(3x + 4y) + e^{2x+y}$$

(ख) प्राचल विचरण विधि से निम्नलिखित अवकल समीकरण

$$y'' - 2y' + y = \frac{12e^x}{x^3} \text{ को हल कीजिए ।}$$

5

3. (क) $y = x$, समीकरण $2x^2y'' + xy' - y = 0$ का एक विशेष समाकल है । समीकरण का व्यापक हल प्राप्त कीजिए ।

3

(ख) एक पण्य की कीमत P की परिवर्तन दर उसकी माँग D और आपूर्ति S के अंतर के समानुपाती है । यदि $D = a - bP$ और $S = c \sin \beta t$, जहाँ a, b, c तथा β अचर हों, तो $P(t)$ ज्ञात कीजिए । यह दिया गया है कि $t = 0$ पर $P = P_0$.

4

(ग) समीकरण

$$(x - y) y^2 u_x - (x - y) x^2 u_y - (x^2 + y^2) u = 0$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए ।

3

4. (क) अवकल समीकरण

$$(6xy - 3y^2 + 2y) dx + 2(x - y) dy = 0$$

का हल प्राप्त कीजिए ।

3

(ख) निम्नलिखित अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y + 1} \text{ का हल प्राप्त कीजिए ।}$$

2

(ग) आंशिक अवकल समीकरण

$$x^2p + y^2q + z^2 = 0$$

का समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिए जो अतिपरवलय

$$xy = x + y, z = 1$$

से होकर जाता है ।

5

5. (क) एक मृतक शरीर की पृष्ठीय तापमान परिवर्तन दर शरीर के तापमान और आसपास के वातावरण के तापमान के अंतर के समानुपाती है । प्राप्त होने पर मृतक शरीर का तापमान 85° F और दो घंटे बाद 74° F था । यदि आसपास का तापमान 68° F हो, तो मृत्यु के कितने समय बाद शरीर प्राप्त हुआ, वह समय ज्ञात कीजिए (मृत्यु के समय शरीर का तापमान 98.6° F मान कर चलिए) ।

5

(ख) हल कीजिए :

3

$$x^2y'' - 2xy' - 4y = x^2 + 2 \ln x$$

(ग) द्वितीय कोटि दीर्घवृत्तीय आंशिक अवकल समीकरण का एक उदाहरण दीजिए और अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए ।

2

6. (क) समीकरण

$$(7y - 3x + 3) dy + (3y - 7x + 7) dx = 0$$

का हल प्राप्त कीजिए ।

3

(ख) अनिर्धारित गुणांक विधि से निम्नलिखित समीकरण

3

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$$

का हल प्राप्त कीजिए ।

(ग) चार्पिट विधि से समीकरण

$$zp^2 - y^2p + y^2q = 0$$

का हल प्राप्त कीजिए ।

4

7. (क) $u(0, y) = 0$, $u(a, y) = 0$, $u(x, b) = 0$ और $u(x, 0) = f(x)$ वाले आयत में लाप्लास समीकरण

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

को हल कीजिए ।

7

(ख) समीकरण

$$6y^2 dx - x(2x^3 + y) dy = 0$$

का हल प्राप्त कीजिए ।

3