No. of Printed Pages : 8

**MTE-07**

# BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

## Term-End Examination

03502

## December, 2018

## ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
## MTE-07 : ADVANCED CALCULUS

*Time : 2 hours* *Maximum Marks : 50*

*(Weightage : 70%)*

***Note :*** *Question no. 1 is* ***compulsory****. Attempt any* ***four*** *questions out of the remaining. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

**1.** State whether the following statements are *True* or *False*. Justify your answers. *5×2=10*

(a) The function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, given by $f(x, y) = |x| + |y|$ is differentiable at (2, 3).

(b) The domain of $f + g$ is $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$, where $f(x, y) = x + \frac{1}{y}$ and $g(x, y) = \frac{1}{x}$.

(c) The function $f(x, y) = e^{x/2y}$ is a homogeneous function.

(d) The level curves of the function $f(x, y) = \frac{x}{y}$ are lines.

(e) The function $f : [-1, 1] \times [-2, 2] \to \mathbf{R}$, defined by

$$f(x, y) = x, \text{ if } y \text{ is rational}$$
$$= 0, \text{ if } y \text{ is not rational}$$

is integrable.

**2.** (a) Show that the limit of the function

$$f(x, y) = \frac{3x^3y}{x^6 + 2y^2} \text{ does not exist}$$

as $(x, y) \to (0, 0)$. *4*

(b) Locate and classify the stationary points of the function $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$. *4*

(c) Show that the closed sphere with centre (2, 3, 7) and radius 10 in $\mathbf{R}^3$ is contained in the open cube

$$P = \{(x, y, z) : |x - 2| < 11, |y - 3| < 11, |z - 7| < 11\}.$$ *2*

**3.** (a) If

$$f(x, y, z) = (e^x, e^{2x+y}, z + 2),$$
$$g(x, y, z) = (3x^2, y^2, 5x - z^2) \text{ and } F = fog,$$

verify that

$$J_F(1, 2, 1) = J_f(3, 4, 4) \cdot J_g(1, 2, 1).$$ *5*

(b) Use cylindrical coordinates to find the volume of a solid region in $\mathbf{R}^3$ bounded above by the upper hemisphere of $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, below by the plane $z = 0$, and on the sides by the cylinder $x^2 + y^2 = 9$. Draw a suitable sketch indicating the region. *5*

4. (a) Check whether the function

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y}{4x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

is continuous at (0, 0) ? 4

(b) If f(x, y) is a homogeneous function of degree n with continuous second order partial derivatives, show that $f_y$ is a homogeneous function of degree n – 1. 4

(c) Consider the equation

$$F(x, y) = x^5 + y^5 - 16\,xy^3 - 1 = 0.$$

Using the Implicit function theorem, show that there exists a differential function g in a neighbourhood of 1 such that g(1) = 2 and F(g(y), y) = 0 in a neighbourhood of (2, 1). 2

5. (a) Calculate the work done by the force F in moving a particle along the line segment from (2, 1) to (– 4, 2), if $F(x, y) = (x^2 + 4xy + 4y^2, 2x^2 + 8xy + 8y^2)$. 5

(b) Evaluate

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9 - x^2}} ln\,(1 + x^2 + y^2)\,dy\,dx$$

by reversing the order of integration. 5

**6.** (a) Using Green's theorem, find the area of the triangle with vertices (1, 1), (4, 1) and (4, 9). *5*

(b) Find $f_x(0, 0)$ and $f_x(x, y)$, where $(x, y) \neq (0, 0)$ for the function

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

if they exist. Is $f_x$ continuous at (0, 0) ? *5*

**7.** (a) Evaluate : *4*

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sin x^2}$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\tan x)^{\sin x}$

(b) Determine whether the following maps are locally invertible at the given points. *4*

(i) $F(x, y) = (e^{xy}, ln\ x)$ at (1, 4)

(ii) $F(x, y) = (2xy, x^2 - y^2)$ at (2, – 3)

(c) If

$$S = \left\{ x + \frac{1}{2x} \,\middle|\, 0 < x < 1 \right\},$$

give an upper bound and a lower bound of S. *2*

# स्नातक उपाधि कार्यक्रम
## (बी.डी.पी.)
## सत्रांत परीक्षा
## दिसम्बर, 2018

## ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
## एम.टी.ई.-07 : उच्च कलन

*समय : 2 घण्टे* *अधिकतम अंक : 50*

*(कुल का : 70%)*

---

***नोट :*** *प्रश्न सं. 1 **अनिवार्य** है । शेष प्रश्नों में से किन्हीं **चार** के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

---

**1.** बताइए कि निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं या *असत्य* । अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए । *5×2=10*

(क) $f(x, y) = |x| + |y|$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(2, 3)$ पर अवकलनीय है ।

(ख) $f + g$ का प्रांत $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ है, जहाँ $f(x, y) = x + \frac{1}{y}$ और $g(x, y) = \frac{1}{x}$.

(ग) फलन $f(x, y) = e^{x/2y}$ एक समघात फलन है ।

(घ) फलन $f(x, y) = \frac{x}{y}$ के स्तर वक्र, रेखाएँ हैं ।

(ङ) $f(x, y) = x$, यदि $y$ परिमेय है

$= 0$, यदि $y$ परिमेय नहीं है

द्वारा परिभाषित फलन $f : [-1, 1] \times [-2, 2] \to \mathbf{R}$ समाकलनीय है ।

**2.** (क) दिखाइए कि

$(x, y) \to (0, 0)$ होने पर फलन

$f(x, y) = \dfrac{3x^3y}{x^6 + 2y^2}$ की सीमा का अस्तित्व नहीं होता । *4*

(ख) फलन $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$ के स्तब्ध बिन्दुओं का पता लगाइए और वर्गीकृत कीजिए । *4*

(ग) दिखाइए कि $\mathbf{R}^3$ में केन्द्र (2, 3, 7) और त्रिज्या 10 वाला संवृत गोला, विवृत घन

$P = \{(x, y, z) : |x - 2| < 11, |y - 3| < 11, |z - 7| < 11\}$

में आविष्ट है । *2*

**3.** (क) यदि

$f(x, y, z) = (e^x, e^{2x+y}, z + 2)$,

$g(x, y, z) = (3x^2, y^2, 5x - z^2)$ और $F = fog$,

तब सत्यापित कीजिए कि

$J_F(1, 2, 1) = J_f(3, 4, 4) \cdot J_g(1, 2, 1)$. *5*

(ख) ऊपर की ओर से $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ के उपरि अर्धगोले और नीचे की ओर से समतल $z = 0$ से और दोनों तरफ से बेलन $x^2 + y^2 = 9$ से परिबद्ध $\mathbf{R}^3$ के घनाकृति प्रदेश का आयतन बेलनी निर्देशांकों का प्रयोग करके ज्ञात कीजिए । प्रदेश को दर्शाने के लिए एक उचित चित्र भी बनाइए । *5*

4. (क) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y}{4x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(0, 0) पर संतत है या नहीं ? 4

(ख) यदि $f(x, y)$ घात n वाला एक समघात फलन हो जिसके द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज संतत हों, तब दिखाइए कि $f_y$ घात $n - 1$ वाला समघात फलन होता है । 4

(ग) समीकरण

$$F(x, y) = x^5 + y^5 - 16\,xy^3 - 1 = 0$$

लीजिए । अस्पष्ट फलन प्रमेय से दिखाइए कि 1 के प्रतिवेश में एक ऐसे अवकलनीय फलन g का अस्तित्व होता है जिसके लिए $g(1) = 2$ और (2, 1) के प्रतिवेश में $F(g(y), y) = 0$. 2

5. (क) (2, 1) से (– 4, 2) तक के रेखा खंड के अनुदिश एक कण को ले जाने में बल F द्वारा किया गया कार्य परिकलित कीजिए यदि

$$F(x, y) = (x^2 + 4xy + 4y^2, 2x^2 + 8xy + 8y^2).$$ 5

(ख) समाकलन के क्रम में परिवर्तन करने के बाद

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9 - x^2}} ln\,(1 + x^2 + y^2)\,dy\,dx$$

का मूल्यांकन कीजिए । 5

6. (क) ग्रीन प्रमेय का प्रयोग करके शीर्ष (1, 1), (4, 1) और (4, 9) वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । 5

(ख) फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

के लिए $f_x(0, 0)$ और $f_x(x, y)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $(x, y) \neq (0, 0)$, यदि उनका अस्तित्व हो । तो क्या $f_x, (0, 0)$ पर संतत है । 5

7. (क) मूल्यांकन कीजिए : 4

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sin x^2}$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\tan x)^{\sin x}$

(ख) ज्ञात कीजिए कि दिए गए बिन्दुओं पर निम्नलिखित प्रतिचित्र स्थानिकत: व्युत्क्रमणीय हैं या नहीं : 4

(i) $(1, 4)$ पर $F(x, y) = (e^{xy}, ln\ x)$

(ii) $(2, -3)$ पर $F(x, y) = (2xy, x^2 - y^2)$

(ग) यदि

$$S = \left\{ x + \frac{1}{2x} \,\middle|\, 0 < x < 1 \right\},$$

तब S का उपरि परिबंध और निम्न परिबंध बताइए । 2