No. of Printed Pages : 8

MTE-06

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

03782

December, 2018

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-06 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. 7 is **compulsory**. Answer any **four** questions from questions no. **1** to **6**. Use of calculators is **not** allowed.*

---

1. (a) Let $G = \{g : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : g(x) = ax + b, a, b \in \mathbf{Q}, a \neq 0\}$. Check whether or not G is a group with respect to the composition of mappings. For $f(x) = 2x + 3$, find all $g \in G$ such that $fog = gof$. 5

   (b) Let $I = < 24, 36, 42 >$ be an ideal of $\mathbf{Z}$. Find a such that $I = < a >$. 3

   (c) What is the maximum order an element of S_5 can have and why ? 2

2. (a) Show that if a group is non-abelian, it must have at least six elements. 4

(b) Let I and J be ideals of a ring R. Define $f : R \to R/I \times R/J$ by $f(r) = (r + I, r + J)$. Prove that f is a ring homomorphism. 4

(c) If I is a non-trivial ideal in $\mathbf{R}$, prove that $I = \mathbf{R}$. 2

3. (a) Show that $GL_2(\mathbf{Q})$ is isomorphic to a subgroup of $GL_3(\mathbf{Q})$. 5

(b) Give an example, with justification, of a ring homomorphism $f : R \to S$ that does not map the identity element of R to the identity element of S. 5

4. (a) Check whether or not $R = \mathbf{Q}[x]/I$ is a field, where $I = < x^3 + 2x + 2 >$. If R is a field, find $(\overline{x+1})^{-1}$ in R. If R is not a field, obtain the quotient field of R. 5

(b) Show that every abelian group of order 21 is cyclic. 5

5. (a) Let R be a ring with identity and let $f : R \to R$, given by $f(r) = r^2$, be a ring homomorphism. Then show that R is a ring of characteristic 2, and it is commutative. Also find the kernel of this homomorphism. *6*

(b) Check whether or not $\sim$, defined on $\mathbf{Z} \setminus \{0\}$ by $n \sim m$ iff $nm > 0$, is an equivalence relation. If $\sim$ is an equivalence relation, find $[-5]$. If $\sim$ isn't an equivalence relation, define an equivalence relation on **Z**. *4*

6. (a) Show that if G is a group and $H \subseteq G$ such that $|G : H| = 2$, then for any $x \in G$ either $x \in H$ or $x^2 \in H$. *5*

(b) Give an example, with justification, of each of the following : *5*

(i) A prime ideal of a ring, which is not a maximal ideal

(ii) A commutative subring of a non-commutative ring

(iii) Two distinct elements of $\mathbf{R}[x]/< x^2 >$

7. State whether the following statements are *true* or *false*. Give reasons to support your answers. *10*

(i) Any two non-zero subgroups of $\mathbf{Z}$ are isomorphic.

(ii) If R is an integral domain, then so is $R \times R$.

(iii) $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ is a set only if all the a_is satisfy a rule.

(iv) If G is a group and $H \leq G$ such that $|G : H| = 3$, then $H \trianglelefteq G$.

(v) Every ring has a multiplicative identity.

एम.टी.ई.-06

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2018

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-06 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे | *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *प्रश्न सं. **7** करना **अनिवार्य** है । प्रश्न सं. **1** से **6** में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।*

---

1. (क) मान लीजिए

$G = \{g : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : g(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbf{Q},\ a \neq 0\}$.
जाँच कीजिए कि फलनों के संयोजन के सापेक्ष G समूह है या नहीं । $f(x) = 2x + 3$ के लिए ऐसे सभी $g \in G$ ज्ञात कीजिए जिनके लिए $fog = gof$. *5*

(ख) मान लीजिए $I = < 24, 36, 42 >$, $\mathbf{Z}$ की गुणजावली है । ऐसा a ज्ञात कीजिए जिसके लिए $I = < a >$. *3*

(ग) S_5 के किसी भी अवयव की अधिक-से-अधिक कोटि क्या हो सकती है, और क्यों ? *2*

2. (क) दिखाइए कि यदि कोई समूह अन्-आबेली है, तब इसके कम-से-कम छह अवयव ज़रूर होंगे । 4

(ख) मान लीजिए I और J वलय R की गुणजावलियाँ हैं । $f(r) = (r + I, r + J)$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R \to R/I \times R/J$ लीजिए । सिद्ध कीजिए कि f एक वलय समाकारिता है । 4

(ग) यदि I, $\mathbf{R}$ में एक अतुच्छ गुणजावली है, तब सिद्ध कीजिए कि $I = \mathbf{R}$. 2

3. (क) दिखाइए कि $GL_2(\mathbf{Q})$, $GL_3(\mathbf{Q})$ के एक उपसमूह के तुल्याकारी है । 5

(ख) एक ऐसी वलय समाकारिता $f : R \to S$ का पुष्टि सहित उदाहरण दीजिए जो R के तत्समक अवयव को S के तत्समक अवयव में नहीं ले जाता । 5

4. (क) जाँच कीजिए कि $R = \mathbf{Q}[x]/I$ एक क्षेत्र है या नहीं, जहाँ $I = < x^3 + 2x + 2 >$. यदि R एक क्षेत्र है, तो R में $(\overline{x+1})^{-1}$ ज्ञात कीजिए । यदि R क्षेत्र नहीं है, तो R का विभाग क्षेत्र प्राप्त कीजिए । 5

(ख) दिखाइए कि कोटि 21 वाला प्रत्येक आबेली समूह चक्रीय होगा । 5

5. (क) मान लीजिए R तत्समकी वलय है और मान लीजिए $f(r) = r^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R \to R$ एक वलय समाकारिता है । तब दिखाइए कि R अभिलक्षणिक 2 वाला वलय है और क्रमविनिमेय भी है । इस समाकारिता की अष्टि भी ज्ञात कीजिए । *6*

(ख) जाँच कीजिए कि $n \sim m$ यदि और केवल यदि $nm > 0$ द्वारा $\mathbf{Z} \setminus \{0\}$ पर परिभाषित $\sim$ एक तुल्यता संबंध है या नहीं । यदि $\sim$ तुल्यता संबंध है, तो $[-5]$ ज्ञात कीजिए । यदि $\sim$ तुल्यता संबंध नहीं है, तब $\mathbf{Z}$ पर एक तुल्यता संबंध परिभाषित कीजिए । *4*

6. (क) दिखाइए कि यदि G एक समूह है और H, G का ऐसा उपसमूह है जिसके लिए $|G : H| = 2$, तब किसी भी $x \in G$ के लिए या $x \in H$ या $x^2 \in H$ होगा । *5*

(ख) निम्नलिखित प्रत्येक का एक पुष्टि सहित उदाहरण दीजिए : *5*

(i) किसी वलय की एक अभाज्य गुणजावली, जो उच्चिष्ठ गुणजावली नहीं है

(ii) किसी अक्रमविनिमेय वलय का क्रमविनिमेय उपवलय

(iii) $\mathbf{R}[x]/< x^2 >$ के दो अलग-अलग अवयव

7. बताइए निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं या *असत्य* । अपने उत्तरों के पक्ष में कारण दीजिए । *10*

(i) **Z** के कोई भी दो शून्येतर उपसमूह तुल्याकारी होंगे ।

(ii) यदि R पूर्णांकीय प्रांत है, तब $R \times R$ पूर्णांकीय प्रांत होगा ।

(iii) $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ केवल तभी एक समुच्चय है यदि सभी a_i एक नियम को संतुष्ट करते हैं ।

(iv) यदि G एक समूह है और $H \leq G$ इस प्रकार का है कि $|G : H| = 3$, तब $H \trianglelefteq G$.

(v) प्रत्येक वलय का गुणनात्मक तत्समक होता है ।