

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)****Term-End Examination**

00912

December, 2018**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-03 : MATHEMATICAL METHODS***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50**(Weightage : 70%)*

Note : Question no. 7 is **compulsory**. Attempt any **four** questions from questions no. 1 to 6. Use of calculators is **not** allowed. Symbols have their usual meanings.

1. (a) Evaluate : 4

$$\int_0^1 x \tan^{-1} x \, dx$$

(b) Find the equation of the line parallel to the line $x = 4 - h$, $y = 2 + 3h$, $z = -4 + h$ and passing through $(3, 1, 5)$. 4

- (c) Check the continuity at $x = 0$ of the function f where

2

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{if } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

2. (a) 4 cards are drawn from a pack of cards. Find the probability that there is one card of each suit.

2

- (b) Evaluate the following limit :

3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}$$

- (c) Find the mean and standard deviation for the following data :

5

| Class Interval | Frequency (f) |
|----------------|---------------|
| 0 - 10 | 10 |
| 10 - 20 | 30 |
| 20 - 30 | 20 |
| 30 - 40 | 0 |
| 40 - 50 | 10 |
| 50 - 60 | 30 |

3. (a) Solve : 4

$$(x + 2y^3) dy = y dx$$

(b) Do the vectors $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$,
and $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ form a right angled
triangle ? 3

(c) Out of 24 bulbs in a shop, 4 bulbs are
defective. If we randomly check two bulbs,
then what is the probability that

(i) both the bulbs are defective,

(ii) neither of them is defective,

(iii) one of them is defective ? 3

4. (a) A continuous random variable X has the
PDF

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Find

(i) Value of the constant k

(ii) CDF

(iii) Standard deviation of X. 4

(b) Find the equation of the tangent to the curve $y(x - 2)(x - 3) = x - 7$ where it cuts the x-axis. 4

(c) The sum of a negative integer and its square is 30. Find the integer. 2

5. (a) If for a binomial variate X with $n = 6$, $P(X = 2) = 9P(X = 4)$ then find the mean of the binomial distribution. 3

(b) If $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x + y}\right)$, show that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u. \quad 3$$

(c) Among 64 offsprings of a certain cross between guinea pigs, 34 were red, 10 were black and 20 were white. According to the genetic model, these numbers should be in the ratio of 9 : 3 : 4. Are the data consistent with the model at 5% level? 4

[The following values of χ^2 may be useful

$$\chi_{3,05}^2 = 7.81, \chi_{2,05}^2 = 5.99, \chi_{1,05}^2 = 3.84]$$

6. (a) Find two non-zero numbers whose sum is 15 and the square of one multiplied by the cube of the other is maximum. 4

- (b) For the normal distribution $N(1, 0.25)$ find

(i) $P(0.8 \leq X \leq 1.1)$

(ii) $P(X \geq 1.05)$

You may find the following data useful : 4

$$\phi(0.8) = 0.7881, \phi(1.1) = 0.8643$$

$$\phi(0.2) = 0.5793, \phi(0.4) = 0.6554$$

- (c) Find the sum of the finite geometric series : 2

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

7. State whether the following statements are *True* or *False*. Give reasons in support of your answers.

$$5 \times 2 = 10$$

- (a) If $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, ($0 \leq t \leq \pi$), then

$$\frac{dy}{dx} \text{ at } t = \frac{\pi}{4} \text{ is } 1.$$

- (b) Correlation coefficient between x and $-x$ is

$$-1.$$

- (c) If $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ is such that $f(x) = \cos(x + 2)$ then f is invertible.
- (d) For two mutually exclusive events A and B ,
 $P(A \cup B) = P(A)P(B)$.
- (e) The asymptote of the curve $y^3 + yx^2 - x^2 = 0$ parallel to x -axis is $y = 1$.
-

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2018

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-03 : गणितीय विधियाँ

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट: प्रश्न सं. 7 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटरो के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है। प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

1. (क) मूल्यांकन कीजिए :

4

$$\int_0^1 x \tan^{-1} x \, dx$$

(ख) रेखा $x = 4 - h$, $y = 2 + 3h$, $z = -4 + h$ के समांतर रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु $(3, 1, 5)$ से होकर जाती है।

4

(ग) $x = 0$ पर फलन f के सांतत्य की जाँच कीजिए जहाँ, 2

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{यदि } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$$

2. (क) ताश की एक गड्डी से 4 पत्ते निकाले गए। निकाले गए पत्तों में एक-एक पत्ता प्रत्येक रंग का होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 2

(ख) निम्नलिखित का मूल्यांकन कीजिए : 3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}$$

(ग) निम्नलिखित आँकड़ों का माध्य और मानक विचलन ज्ञात कीजिए : 5

| वर्ग-अंतराल | बारंबारता (f) |
|-------------|---------------|
| 0 - 10 | 10 |
| 10 - 20 | 30 |
| 20 - 30 | 20 |
| 30 - 40 | 0 |
| 40 - 50 | 10 |
| 50 - 60 | 30 |

3. (क) हल कीजिए : 4

$$(x + 2y^3) dy = y dx$$

(ख) क्या सदिशों $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, और $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ से समकोण त्रिभुज बनता है ? 3

(ग) एक दुकान में 24 बल्बों में से 4 बल्ब खराब हैं। यदि हम यादृच्छया दो बल्बों की जाँच करते हैं, तो इसकी क्या प्रायिकता होगी कि

- (i) दोनों बल्ब खराब हों,
- (ii) दोनों में से कोई भी बल्ब खराब न हो,
- (iii) दोनों में से एक बल्ब खराब हो ? 3

4. (क) संतत यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन फलन निम्न है :

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

- (i) अचर k का मान
- (ii) संचयी बंटन फलन
- (iii) X का मानक विचलन 4

(ख) वक्र $y(x-2)(x-3) = x-7$ की स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जहाँ यह x -अक्ष को काटती है । 4

(ग) ऋण पूर्णांक और उसके वर्ग का योगफल 30 है । पूर्णांक ज्ञात कीजिए । 2

5. (क) द्विपद चर X के लिए यदि $n=6$ और $P(X=2) = 9P(X=4)$ हो तो द्विपद बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए । 3

(ख) यदि $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x+y}\right)$, तो दिखाइए कि

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u. \quad 3$$

(ग) गिनी-पिग के बीच सहवास से पैदा हुए 64 बच्चों में से 34 लाल, 10 काले और 20 सफेद बच्चे पैदा हुए । जेनेटिक निदर्श के अनुसार इन संख्याओं का अनुपात $9 : 3 : 4$ होना चाहिए । क्या 5% स्तर पर ये आँकड़े निदर्श के सुसंगत हैं ? 4

$[\chi^2$ के निम्नलिखित मान आपके लिए उपयोगी हो सकते हैं : $\chi_{3,05}^2 = 7.81$, $\chi_{2,05}^2 = 5.99$, $\chi_{1,05}^2 = 3.84$]

6. (क) ऐसी दो शून्येतर संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योगफल 15 है और एक संख्या के वर्ग और दूसरी संख्या के घन का गुणनफल अधिकतम है । 4

(ख) प्रसामान्य बंटन $N(1, 0.25)$ के लिए

(i) $P(0.8 \leq X \leq 1.1)$

(ii) $P(X \geq 1.05)$ ज्ञात कीजिए । 4

निम्नलिखित आँकड़े आपके लिए उपयोगी हो सकते हैं :

$$\phi(0.8) = 0.7881, \phi(1.1) = 0.8643$$

$$\phi(0.2) = 0.5793, \phi(0.4) = 0.6554$$

(ग) सांत गुणोत्तर श्रेणी

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

का योगफल ज्ञात कीजिए । 2

7. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य । अपने उत्तर के समर्थन में कारण दीजिए । $5 \times 2 = 10$

(क) यदि $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, ($0 \leq t \leq \pi$), तो

$$t = \frac{\pi}{4} \text{ पर } \frac{dy}{dx} = 1.$$

(ख) x और $-x$ के बीच सहसंबंध गुणांक -1 है ।

- (ग) यदि $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ऐसा है जिसके लिए $f(x) = \cos(x + 2)$ तब f व्युत्क्रमणीय होगा ।
- (घ) दो परस्पर अपवर्जी घटनाओं A और B के लिए $P(A \cup B) = P(A)P(B)$.
- (ङ) x -अक्ष के समान्तर, वक्र $y^3 + yx^2 - x^2 = 0$ का अनंतस्पर्शी $y = 1$ है ।
-