No. of Printed Pages : 8

MTE-02

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2018

03542

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-02 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 hours — *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. 7 is **compulsory**. Attempt any **four** questions from questions no. 1 to 6. Use of calculators is **not** allowed.*

---

1. (a) Let

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_2 + x_3 = 0\}.$$

Show that W is a subspace of $\mathbf{R}^3$. Find two subspaces W_1 and W_2 of $\mathbf{R}^3$ such that $\mathbf{R}^3 = W \oplus W_1$ and $\mathbf{R}^3 = W \oplus W_2$ but $W_1 \neq W_2$. 7

(b) Find a unit vector in $\mathbf{R}^3$ that is orthogonal to $(1, 2, 1)$ and $(1, -1, 2)$. 3

2. (a) Let $\mathbf{P}_4$ be the vector space over $\mathbf{R}$ of the set of all polynomials of degree at most four. Show that $1 + x + x^4$ and $1 + x^3$ are linearly independent. Find a basis of $\mathbf{P}_4$ consisting of vectors $1 + x + x^4$ and $1 + x^3$. 4

(b) Let

$$T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2 \text{ given by}$$

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_2 - x_3).$$

Prove that T is a linear transformation. Find the rank of T. Can we find a such that $(3, 2, a)$ is in the kernel of T ? Give reasons for your answer. 4

(c) Find the values of a, b $\in$ **C** for which the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ a & b+i & 2-i \\ 1-i & 2+i & 1 \end{bmatrix} \text{ is Hermitian.}$$ 2

3. (a) Let V be a finite-dimensional vector space over a field K and let $T : V \to V$ be a linear transformation. Prove that T is one-one if and only if T is onto. 5

(b) Find the eigenvalues and the eigenspaces of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}. \text{ Is A diagonalisable ?}$$

Give reasons for your answer. 5

4. (a) Reduce the

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \end{bmatrix}$$ to the row-reduced

echelon form. At each stage, state the row operation you are using. Also give the rank of this matrix. *4*

(b) Use Cayley-Hamilton theorem to evaluate A^8, where *4*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 24 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(c) Give two distinct elements, with justification, of $\mathbf{R}^5/\mathbf{R}^3$. *2*

5. (a) Use the Fundamental Theorem of Homomorphism to prove that $\mathbf{C}^5/\mathbf{C}^4 \simeq \mathbf{C}$. *6*

(b) Find an orthonormal basis for a subspace

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{C}^4 \mid x_1 + ix_2 = 0, \; x_2 + x_3 - x_4 = 0\} \text{ of } \mathbf{C}^4.$$ *4*

6\. (a) Find the real quadratic form represented by the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Also, obtain a set of principal axes for it, and hence reduce it to its normal canonical form. 5

(b) Find the vector equation of the plane determined by the points (0, 2, 1), (2, 1, 0), (1, – 1, 0). Further, check whether the line $\mathbf{r} = (1 + 2\alpha)\,\mathbf{i} + (2 - 3\alpha)\,\mathbf{j} - (1 + 5\alpha)\,\mathbf{k}$ intersects this plane. If it intersects, find the point of intersection. If the line and plane do not intersect, find the equation of another line that intersects this plane. 5

7\. Which of the following statements are *True* and which are *False* ? Justify your answers either with a short proof or a counter-example. $5\times2=10$

(a) If $T : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$ is a linear transformation, then there is $u \neq 0$ in $\mathbf{R}^5$ such that $T(u) = 0$.

(b) A 3×3 matrix of rank one has an eigenvalue zero.

(c) An orthonormal set of vectors is a linearly independent set.

(d) If U and V are subspaces of a finite-dimensional vector space W, then $\dim (U \cap V) \geq 1$.

(e) The relation '$\sim$' on $\mathbf{Z}^2$, given by $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow (a - b) \mid (c - d)$ is an equivalence relation.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2018

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-02 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *प्रश्न सं. 7 अनिवार्य है । प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।*

---

1. (क) मान लीजिए

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_2 + x_3 = 0\}.$$

दिखाइए कि W, $\mathbf{R}^3$ की उपसमष्टि है । $\mathbf{R}^3$ की ऐसी दो उपसमष्टियाँ W_1 और W_2 ज्ञात कीजिए जिनके लिए $\mathbf{R}^3 = W \oplus W_1$ और $\mathbf{R}^3 = W \oplus W_2$ लेकिन $W_1 \neq W_2$. *7*

(ख) $\mathbf{R}^3$ का एक ऐसा मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए, जो (1, 2, 1) और (1, – 1, 2) के सापेक्ष लांबिक है । *3*

2. (क) मान लीजिए $\mathbf{P}_4$, $\mathbf{R}$ पर अधिक-से-अधिक 4 घात वाले सभी बहुपदों के समुच्चय की सदिश समष्टि है । दिखाइए कि $1 + x + x^4$ और $1 + x^3$ रैखिकत: स्वतंत्र हैं । $\mathbf{P}_4$ का वह आधार ज्ञात कीजिए जिसमें सदिश $1 + x + x^4$ और $1 + x^3$ शामिल हैं । *4*

(ख) मान लीजिए

$$T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2,$$

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_2 - x_3)$$

द्वारा परिभाषित है ।

सिद्ध कीजिए कि T एक रैखिक रूपांतरण है । T की जाति ज्ञात कीजिए । क्या हम ऐसा a ज्ञात कर सकते हैं जिसके लिए $(3, 2, a)$ T की अष्टि में हो ? अपने उत्तर के कारण बताइए । 4

(ग) $a, b \in \mathbf{C}$ के वे मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ a & b+i & 2-i \\ 1-i & 2+i & 1 \end{bmatrix}$$ हर्मिटी हो । 2

3. (क) मान लीजिए V क्षेत्र K पर परिमित-विमीय सदिश समष्टि है और मान लीजिए $T : V \to V$ एक रैखिक रूपांतरण है । सिद्ध कीजिए कि T एकैकी है यदि और केवल यदि T आच्छादी है । 5

(ख) आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$ के आइगेनमान और

आइगेनसमष्टियाँ ज्ञात कीजिए । क्या A विकर्णनीय है ? अपने उत्तर के कारण बताइए । 5

4. (क) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \end{bmatrix}$ को पंक्ति-समानीत सोपानक रूप तक समानीत कीजिए । प्रत्येक चरण में बताइए कि आप किस पंक्ति संक्रिया का प्रयोग कर रहे हैं । इस आव्यूह की जाति भी बताइए । 4

(ख) कैली-हैमिल्टन प्रमेय का प्रयोग करके A^8 का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 24 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(ग) $\mathbf{R}^5/\mathbf{R}^3$ के पुष्टि सहित दो अलग-अलग अवयव दीजिए । 2

5. (क) मूलभूत समाकारिता प्रमेय से सिद्ध कीजिए कि $\mathbf{C}^5/\mathbf{C}^4 \simeq \mathbf{C}$. 6

(ख) $\mathbf{C}^4$ की उपसमष्टि

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{C}^4 \mid x_1 + ix_2 = 0, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$

के लिए प्रसामान्य लांबिक आधार ज्ञात कीजिए । 4

6. (क) आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$ द्वारा निरूपित वास्तविक

द्विघाती समघात ज्ञात कीजिए । इसके मुख्य अक्षों का समुच्चय भी प्राप्त कीजिए और इस तरह इसे प्रसामान्य विहित रूप तक समानीत कीजिए । *5*

(ख) बिन्दुओं (0, 2, 1), (2, 1, 0) और (1, – 1, 0) द्वारा निर्धारित समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए । इसके आगे, जाँच कीजिए कि रेखा $\mathbf{r} = (1 + 2\alpha)\,\mathbf{i} + (2 - 3\alpha)\,\mathbf{j} - (1 + 5\alpha)\,\mathbf{k}$ इस समतल को प्रतिच्छेद करती है या नहीं । यदि करती है, तो प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए । यदि रेखा और समतल प्रतिच्छेद नहीं करते, तो एक ऐसी अन्य रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो इस समतल का प्रतिच्छेद करती है । *5*

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन *सत्य* हैं और कौन-से *असत्य* ? अपने उत्तरों की एक लघु उपपत्ति या एक प्रत्युदाहरण से पुष्टि कीजिए । *5×2=10*

(क) यदि $T : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$ एक रैखिक रूपांतरण है, तब $\mathbf{R}^5$ में एक ऐसा $u \neq 0$ है जिसके लिए $T(u) = 0$.

(ख) जाति एक के 3×3 आव्यूह का एक आइगेनमान शून्य होता है ।

(ग) प्रसामान्य लांबिक सदिशों का समुच्चय रैखिकत: स्वतंत्र समुच्चय है ।

(घ) यदि U और V परिमित-विमीय सदिश समष्टि W की उपसमष्टियाँ हैं, तब $\dim (U \cap V) \geq 1$.

(ङ) $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow (a - b) \mid (c - d)$ द्वारा $\mathbf{Z}^2$ पर दिया गया संबंध '$\sim$' एक तुल्य संबंध है ।