

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

04892

December, 2018

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-01 : CALCULUS**

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. 1 is compulsory. Attempt any four questions from questions no. 2 to 7. Use of calculators is not allowed.*

1. Which of the following statements are *true* or *false* ? Give reasons for your answers. $5 \times 2 = 10$

(a) The greatest integer function is continuous on \mathbb{R} .

(b) A critical point of a function is its extremum.

(c)
$$\frac{d}{dx} \left[\int_{x^2}^0 \sin(t^2) dt \right] = -\sin(x^4).$$

- (d) The function $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, defined by $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 2$, is always increasing.
- (e) The maximum domain of the function f , given by $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x}}$ is $]0, 1[$.

2. (a) If $y = a \cos(\ln x) + b \sin(\ln x)$, then find the value of $x^2 y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1}$ in terms of y_n , where y_n is the n^{th} derivative of y with respect to x . 4

- (b) If f is a function from $\mathbf{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbf{R}$, defined by $f(x) = \frac{4x^2 - 7x - 2}{x - 2}$, find a $\delta > 0$, such that $|f(x) - 9| < \frac{1}{100}$ for $0 < |x - 2| < \delta$.

Hence, show that $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 9$. 4

- (c) Let $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ be a partition of $[0, 1]$ and a function $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ be defined by $f(x) = x^3$. Find $U(P, f)$. 2

3. (a) Differentiate $\tan^{-1}\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)$ with respect to $\frac{x}{2}$. 3

- (b) A river is 80 metres wide. The depth d (in metres) at a distance x metres from one bank is given by the following table :

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
d	0	4	7	9	12	15	14	8	3

Find the area of the cross-section by the trapezoidal rule. 3

- (c) If $I_m = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin^m x \, dx$, $m \geq 2$, find an equation relating I_m and I_{m-2} . 4

4. (a) Using Lagrange's mean value theorem, prove that for every $x > 0$, $\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x$. 5

- (b) Evaluate : 5

$$\int \frac{x\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}} \, dx$$

5. (a) The cost of fuel running an engine is proportional to the square of the speed, (in km/h) and is ₹ 48 per hour when the speed is 16 km/h. Other costs amount to ₹ 300 per hour. Find the speed which minimises the total cost of covering a distance of d km. 5

- (b) Find the volume of the solid of revolution obtained by rotating the curve $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$ about the x-axis. 5
6. Trace the curve $x(y^2 + 4) = 8$, stating all the properties you use for doing so. 10
7. (a) Find the length of the curve $y = \ln \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)$ from $x = 1$ to $x = 2$. 3
- (b) For which value(s) of k , is the function f , defined as below, continuous at $x = 2$?
- $$f(x) = \begin{cases} 3 - kx, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{x^2}{4} - 3, & x \geq 2 \end{cases}$$
- Further, at which other points in $[1, \infty[$ is f continuous, and why? 3
- (c) Find $\frac{dy}{dx}$, if $y = x^{\ln x} + (\sin x)^{\cot x}$. 4
-

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2018

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-01 : कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50
(कुल का : 70%)

नोट: प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं या असत्य? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए। 5×2=10

(क) अधिकतम पूर्णांक फलन \mathbf{R} पर सतत है।

(ख) किसी फलन का क्रांतिक बिंदु उसका चरम-बिंदु होता है।

(ग)
$$\frac{d}{dx} \left[\int_{x^2}^0 \sin(t^2) dt \right] = -\sin(x^4).$$

(घ) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 2$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ हमेशा वर्धमान है ।

(ङ) $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x}}$ द्वारा परिभाषित फलन f का अधिकतम प्रांत $]0, 1[$ है ।

2. (क) यदि $y = a \cos(\ln x) + b \sin(\ln x)$ है, तो $x^2 y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1}$ का मान y_n के पदों में ज्ञात कीजिए, जहाँ y_n, x के सापेक्ष y का n वाँ अवकलज है ।

4

(ख) यदि $f(x) = \frac{4x^2 - 7x - 2}{x - 2}$ द्वारा परिभाषित फलन f ,

$\mathbf{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbf{R}$ है, तब एक ऐसा $\delta > 0$ ज्ञात कीजिए जिससे कि $0 < |x - 2| < \delta$ के लिए

$|f(x) - 9| < \frac{1}{100}$ हो । इस प्रकार दिखाइए कि

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 9.$$

4

(ग) मान लीजिए $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ अंतराल $[0, 1]$

का एक विभाजन है और $f(x) = x^3$ द्वारा परिभाषित फलन $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ है । तो $U(P, f)$ ज्ञात कीजिए ।

2

3. (क) $\frac{x}{2}$ के सापेक्ष $\tan^{-1}\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)$ को

अवकलित कीजिए ।

3

- (ख) एक नदी 80 मीटर चौड़ी है। नदी के एक किनारे से x मीटर दूरी पर गड़ाई d (मीटर में) निम्नलिखित सारणी में दी गई है :

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
d	0	4	7	9	12	15	14	8	3

समलंबी नियम द्वारा अनुप्रस्थ-परिच्छेद का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

3

- (ग) यदि $I_m = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin^m x \, dx$, $m \geq 2$ है, तो I_m और I_{m-2} के बीच संबंध स्थापित करने वाला समीकरण ज्ञात कीजिए।

4

4. (क) लग्रांज के माध्यमान प्रमेय का प्रयोग करके प्रत्येक $x > 0$ के लिए सिद्ध कीजिए कि

5

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x.$$

- (ख) मूल्यांकन कीजिए :

5

$$\int \frac{x\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}} dx$$

5. (क) एक इंजन के चलने में लगे ईंधन की लागत, गति (किमी प्रति घंटा में) के वर्ग के समानुपाती है और गति के 16 किमी प्रति घंटा होने पर लागत ₹ 48 प्रति घंटा आती है। अन्य लागतों पर खर्च ₹ 300 प्रति घंटा आता है। वह गति ज्ञात कीजिए जिससे d km की दूरी तय करने के लिए कुल लागत न्यूनतम हो।

5

(ख) वक्र $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$ को x -अक्ष के प्रति घुमाने पर प्राप्त घनाकृति का आयतन ज्ञात कीजिए । 5

6. वक्र $x(y^2 + 4) = 8$ का अनुरेखण कीजिए । ऐसा करने के लिए प्रयोग किए गए सभी गुणधर्मों का स्पष्ट वर्णन कीजिए । 10

7. (क) $x = 1$ से $x = 2$ तक वक्र $y = \ln \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)$ की लंबाई ज्ञात कीजिए । 3

(ख) k के किन मान/नों के लिए निम्नलिखित परिभाषित फलन f , $x = 2$ पर सतत है ?

$$f(x) = \begin{cases} 3 - kx, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{x^2}{4} - 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

इससे आगे $[1, \infty[$ में किन अन्य बिन्दुओं पर f सतत है, और क्यों ? 3

(ग) यदि $y = x^{\ln x} + (\sin x)^{\cot x}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए । 4