PHE-14

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)

Term-End Examination

December, 2017

00091

PHYSICS

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS-III

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *All questions are **compulsory**, but internal choices are given. Symbols have their usual meanings. The marks for each question are indicated against it.*

1. Attempt any ***five*** parts : *5×2=10*

(a) Show that the transpose of an orthogonal matrix is its inverse.

(b) Prove that a symmetric tensor A^{ij} remains symmetric under coordinate transformations.

(c) Show that the function $f(z) = z^2 + z$ is analytic everywhere.

(d) Locate and name the singularities of $f(z) = \dfrac{1}{z^2\,(z^2+9)}$.

(e) Determine the Laplace transform of the function $e^{-t} \sin 2t$.

(f) Show that :

$$\int_{-1}^{1} P_2(x)\,[P_0(x) + P_2(x)]\,dx = \frac{2}{5}$$

(g) Show that the set of real numbers is not a group under multiplication.

(h) Using the Rodrigues formula for Laguerre polynomials

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

determine $L_2(x)$.

2. Attempt any *two* parts : *2×5=10*

(a) Determine the eigenvalues and eigenvectors of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Show that its eigenvectors are orthogonal.

(b) Verify the Cayley-Hamilton theorem for the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(c) (i) Show that the dot product of two 3-D vectors is a scalar.

(ii) Show that the set of all matrices of order 2×2 is a group under addition of matrices.

3. Attempt any ***two*** parts : *2×5=10*

(a) Using Cauchy's integral formula evaluate the following integral over the closed contour formed by the lines $x = \pm 1$ and $y = \pm 1$

$$\oint_C \frac{\tan z}{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2} dz.$$

(b) Using Jordan's Lemma, show that

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^2 + 4} = \frac{\pi e^{-2}}{2}$$

(c) Obtain the Taylor series expansion of $\cos^2 z$ about $z = 0$.

4. (a) Obtain the Fourier transform of

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{for } \pi/2 < |x| < \pi \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$ *5*

(b) Obtain the inverse Laplace transform of the function :

$$F(s) = \frac{4s + 2}{s^2 + 6s + 34}$$ *5*

OR

Using the method of Laplace transforms, solve the following initial value problem :

$$y'' - 2y' + 5y = 0; \; y(0) = -1, \; y'(0) = 7$$ *10*

5. Using the recurrence relation

$$(n + 1)\, P_{n+1}(x) - (2n + 1)\, x\, P_n(x) + n\, P_{n-1}(x) = 0$$

evaluate the integral

$$\int_{-1}^{1} x\, P_{n-1}(x)\, P_n(x)\, dx$$ *10*

OR

Using the following expression for Bessel function of the first kind of order m :

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(m + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

show that

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{-1/2} \sin x$$ *10*

विज्ञान स्नातक (बी.एस सी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2017

भौतिक विज्ञान

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *सभी प्रश्न अनिवार्य हैं, परन्तु आन्तरिक विकल्प दिए गए हैं । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं । प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं ।*

1. कोई ***पाँच*** भाग कीजिए : *5×2=10*

(क) सिद्ध कीजिए कि एक लांबिक आव्यूह का परिवर्त इसका व्युत्क्रम होता है ।

(ख) सिद्ध कीजिए कि एक सममित प्रदिश (टेन्सर) A^{ij} निर्देशांक रूपांतरणों के अधीन सममित रहता है ।

(ग) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(z) = z^2 + z$ हर जगह विश्लेषिक है ।

(घ) फलन $f(z) = \dfrac{1}{z^2 (z^2 + 9)}$ की विचित्रताएँ निर्धारित कीजिए और उनके नाम बताइए ।

(ङ) फलन $e^{-t} \sin 2t$ का लाप्लास रूपांतर ज्ञात कीजिए ।

(च) सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_{-1}^{1} P_2(x)\,[P_0(x) + P_2(x)]\,dx = \frac{2}{5}$$

(छ) सिद्ध कीजिए कि गुणन के अधीन वास्तविक संख्याओं का समुच्चय एक समूह नहीं है ।

(ज) लागेर बहुपदों के लिए रोड्रिगेज़ सूत्र निम्नलिखित है :

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,(x^n e^{-x})$$

$L_2(x)$ ज्ञात कीजिए ।

2. कोई ***दो*** भाग कीजिए : *2×5=10*

(क) निम्नलिखित आव्यूह के आइगेन मान और आइगेन सदिश ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

सिद्ध कीजिए कि इसके आइगेन सदिश लांबिक हैं ।

(ख) निम्नलिखित आव्यूह के लिए कैले-हैमिल्टन प्रमेय को सत्यापित कीजिए :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(ग) (i) सिद्ध कीजिए कि दो त्रिविम सदिशों का अदिश गुणनफल एक अदिश होता है ।

(ii) सिद्ध कीजिए कि आव्यूहों का योग के अधीन कोटि 2×2 वाले सभी आव्यूहों का समुच्चय एक समूह होता है ।

3. कोई *दो* भाग कीजिए : *2×5=10*

(क) कौशी समाकल सूत्र का प्रयोग कर रेखाओं $x = \pm 1$ और $y = \pm 1$ से बने संवृत कंटूर पर निम्नलिखित समाकल का मान ज्ञात कीजिए :

$$\oint_C \frac{\tan z}{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2} dz$$

(ख) जोर्डन प्रमेयिका का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^2 + 4} = \frac{\pi e^{-2}}{2}$$

(ग) $z = 0$ के प्रति $\cos^2 z$ का टेलर श्रेणी प्रसार प्राप्त कीजिए ।

4. (क) निम्नलिखित फलन का फूरिये रूपांतर प्राप्त कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \pi/2 < |x| < \pi \text{ के लिए} \\ 0, & \text{अन्यथा ।} \end{cases}$$ *5*

(ख) निम्नलिखित फलन का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर प्राप्त कीजिए :

$$F(s) = \frac{4s + 2}{s^2 + 6s + 34}$$ *5*

अथवा

लाप्लास रूपांतर विधि द्वारा निम्नलिखित आदि मान समस्या का हल प्राप्त कीजिए :

$$y'' - 2y' + 5y = 0; \; y(0) = -1, \; y'(0) = 7$$ *10*

5. पुनरावृत्ति संबंध

$$(n+1)\,P_{n+1}(x) - (2n+1)\,x\,P_n(x) + n\,P_{n-1}(x) = 0$$

का प्रयोग कर समाकल

$$\int_{-1}^{1} x\,P_{n-1}(x)\,P_n(x)\,dx$$

का मूल्यांकन कीजिए। *10*

अथवा

कोटि m वाले प्रथम प्रकार के बेसल फलन को निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जाता है :

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

सिद्ध कीजिए कि

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{-1/2} \sin x$$ *10*