No. of Printed Pages : 12

MTE-14

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

00872

December, 2017

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Attempt any **five** questions. Use of calculators is **not** allowed.*

---

1. (a) A body moving with S.H.M. has an amplitude 'a' and time period 'T'. Show that the velocity V at a distance x from the mean position is given by

$$V^2T^2 = 4\pi^2(a^2 - x^2).$$

Let the velocity be v_0 when the distance from the mean position is $\frac{2}{3}$ a. In the subsequent motion if velocity = 3 v_0 and the period being unaltered, then find the new amplitude. *5*

(b) In a colony of birds, when population was 20,000, the proportionate birth rate was 40% per year and proportionate death rate was 10% per year. When the population was 40,000, the proportionate birth rate was 30% per year and proportionate death rate was 20% per year. If the population grows according to the logistic model, find the carrying capacity of the population assuming that no shooting of birds is allowed. 5

2. (a) A ball is thrown vertically upwards with a velocity of 30 m/sec.

(i) How high will it go ?

(ii) How much time will it take to reach the highest point ?

(iii) How fast will it be moving at the end of 2 seconds ?

(iv) With what velocity will it come back to the ground ? 4

(b) Derive the supply function for an entrepreneur whose short run cost function is

$$C_1 = q^3 - 10q^2 + 30q + 60.$$

Also determine the price at which the entrepreneur ceases production in an ideal market. 4

(c) In the simple epidemic model, if the contact rate is 0·002 and the number of susceptibles be 4000 initially, determine the number of susceptibles left after 2 weeks. *2*

3. (a) Consider a rabbit population x(t) at any time t. If αx is the birth rate and βx^2 is the death rate (α, β being constants), then formulate the model of population. If the initial population is 150 and there are 8 births per month and 6 deaths per month occurring at t = 0, how many months does it take for x(t) to reach 95% of the limiting population (α/β) ? *5*

(b) The process of plucking of a guitar string results in the frequency of vibration $\left(\text{dimension} = \frac{1}{T}\right)$ being a function of Young's modulus (same dimension as force per unit area), the length and the density of the string. Use dimensional analysis to derive an expression for the frequency of vibration of the string. *5*

4. (a) In a prey-predictor model, satisfy the following equations :

$$\frac{dx}{dt} = 14x - 2x^2 - xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 16y - 2y^2 - xy.$$

Determine the critical points of the system and discuss the type and stability of each critical point. Which critical point represents the possibility of co-existence of the two populations ? 6

(b) When returns of two securities move in opposite directions, obtain the equations of straight lines relating standard deviation and expected return of the two securities. 4

5. (a) A TV mechanic finds that the time spent on his jobs has an exponential distribution with mean 30 minutes. If he repairs sets in the order in which they come in and the arrival of sets is approximately Poisson with an average rate of 10 per 8 hours a day, what is the repairman's expected idle time each day ? How many jobs are expected ahead of the set just brought in ? 5

(b) The sales of a sugar factory since 2002 are

Year	Sales (in crores of rupees)
2002	9
2003	10
2004	13
2005	11
2006	12

What is the least squares trend line equation using 2002 as the zero year ? *5*

6. (a) The heat-emission rate associated with a stack gas is 5000 kJ/s, the wind and stack gas speeds are 6 and 18 m/s respectively and the inside stack-diameter at the top is 3 m. Estimate the plume rise by means of the Holland formula. *3*

(b) Find the acceleration due to gravity on the Moon and Saturn, given the following data : *4*

$G = 6{\cdot}67 \times 10^{-11}\ m^3/kg$

	Radius	Mass
Moon	$1{\cdot}738 \times 10^6$ m	$7{\cdot}35 \times 10^{22}$ kg
Saturn	$0{\cdot}6 \times 10^7$ m	$5{\cdot}6782 \times 10^{26}$ kg

(c) Bacteria cells grow at a rate proportional to the volume of dividing cells at that moment. If V_0 is the volume of dividing cells at the initial time, t_0, then find the volume of dividing cells at any time, t. Find the time at which the volume of the cells will be double its original size. *3*

7. (a) Consider the pay-off table for two players as given below :

		Player B 1	2	3
Player A	1	– 4	– 2	6
	2	3	0	3
	3	6	– 3	– 5

(i) Find the saddle point and the value of the game.

(ii) Give two equivalent linear programming problems for the above pay-off table. *6*

(b) If the length of the artery is 3 cm, radius 6×10^{-3} cm and driving force is 5×10^{3} dynes/cm^2, then find the average velocity of blood and the maximum peak velocity of blood. *4*

एम.टी.ई.-14

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2017

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-14 : गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।*

---

1. (क) सरल आवर्त गति (SHM) से गतिमान एक पिंड का आयाम 'a' है और आवर्त काल 'T' है । दिखाइए कि माध्य स्थिति से दूरी x पर वेग V, $V^2T^2 = 4\pi^2(a^2 - x^2)$ द्वारा दिया गया है ।

मान लीजिए वेग v_0 है, जब माध्य स्थिति से दूरी $\frac{2}{3}a$ है । बाद की गति में यदि वेग $= 3\,v_0$ और आवर्त काल वही रहता है, तब नया आयाम ज्ञात कीजिए । *5*

(ख) पक्षियों की एक कॉलोनी में, जब समष्टि 20,000 थी, तब समानुपातिक जन्म-दर प्रति वर्ष 40% और समानुपातिक मृत्यु-दर प्रति वर्ष 10% थी । जब समष्टि 40,000 थी, तब समानुपातिक जन्म-दर प्रति वर्ष 30% और समानुपातिक मृत्यु-दर प्रति वर्ष 20% थी । यदि वृद्धिघात निदर्श के अनुसार समष्टि की वृद्धि होती है, तब यह मानकर कि पक्षियों को मारने की अनुमति नहीं है, समष्टि की पालन क्षमता ज्ञात कीजिए । 5

2. (क) एक गेंद को 30 m/sec के वेग से ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर फेंका जाता है ।

(i) यह गेंद कितनी ऊँची जाएगी ?

(ii) अधिकतम ऊँचाई तक पहुँचने में गेंद को कितना समय लगेगा ?

(iii) दो सेकण्ड के बाद यह गेंद कितनी तेज़ी से गतिमान होगी ?

(iv) कितने वेग से यह जमीन पर वापस आएगी ? 4

(ख) एक उद्यमकर्ता के लिए आपूर्ति फलन व्युत्पन्न कीजिए जिसका अल्पकालीन लागत फलन

$$C_1 = q^3 - 10q^2 + 30q + 60 \text{ है ।}$$

वह क़ीमत भी ज्ञात कीजिए जिस पर उद्यमकर्ता आदर्श बाज़ार में अपने उत्पादन को रोक देगा । 4

(ग) एक सरल महामारी निदर्श में, यदि संपर्क दर 0·002 है और प्रारंभ में सुग्राह्यों की संख्या 4000 है, तब 2 सप्ताह बाद बच गए सुग्राह्यों की संख्या ज्ञात कीजिए । 2

3. (क) किसी भी समय t पर खरगोश समष्टि $x(t)$ लीजिए । यदि αx जन्म-दर हो और βx^2 मृत्यु-दर हो (α, β अचर हैं), तब समष्टि का निदर्श सूत्रित कीजिए । यदि प्रारंभिक समष्टि 150 है और $t = 0$ पर प्रति माह 8 जन्म और 6 मृत्यु होती हों, तब सीमांत समष्टि (α/β) के 95% तक पहुँचने के लिए $x(t)$ को कितने माह लगेंगे ? 5

(ख) गिटार के तारों को झंकृत करने की प्रक्रिया से प्राप्त कंपन की आवृत्ति $\left(\text{विमा} = \frac{1}{T}\right)$ यंग के मापांक (विमा बल प्रति इकाई क्षेत्र के बराबर), तार की लंबाई और घनत्व का एक फलन है । विमीय विश्लेषण द्वारा तार के कंपन की आवृत्ति के लिए व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए । 5

4. (क) निम्नलिखित समीकरणों

$$\frac{dx}{dt} = 14x - 2x^2 - xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 16y - 2y^2 - xy$$

को संतुष्ट करने वाले परभक्षी-शिकार निदर्श में निकाय के क्रांतिक बिंदु निर्धारित कीजिए और प्रत्येक क्रांतिक बिंदु के प्रकार और स्थायित्व की चर्चा कीजिए । कौन-सा क्रांतिक बिंदु दो समष्टि के सह-अस्तित्व की संभावना को निरूपित करता है ? *6*

(ख) जब दो प्रतिभूतियों के प्रतिफल प्रतिकूल दिशाओं में चलते हैं, तब दोनों प्रतिभूतियों के मानक विचलन और प्रत्याशित प्रतिफल से संबंधित सरल रेखाओं के समीकरण प्राप्त कीजिए । *4*

5. (क) एक टी.वी. मैकेनिक यह पाता है कि उसके जॉब (मरम्मत) पर ख़र्च हुआ समय 30 मिनट माध्य वाला चरघातांकी बंटन है । यदि वह सैटों की मरम्मत उस क्रम में करता है, जिस क्रम वे आते हैं और सैटों का आगमन प्रति 8 घंटा दिवस में 10 की औसत दर से लगभग प्वासों हो, तो मिस्त्री के लिए प्रतिदिन प्रत्याशित निष्क्रिय समय क्या होगा ? अभी-अभी लाए गए सैट से आगे और कितने प्रत्याशित जॉब होंगे ? *5*

(ख) वर्ष 2002 से चीनी फैक्टरी की बिक्रियाँ निम्नलिखित हैं :

वर्ष	*बिक्री (करोड़ रुपयों में)*
2002	9
2003	10
2004	13
2005	11
2006	12

वर्ष 2002 को शून्य वर्ष के रूप में प्रयोग करके न्यूनतम वर्ग उपनति रेखा समीकरण बताइए । *5*

6. (क) स्टैक गैस से जुड़ी ऊष्मा-उत्सर्जन दर 5000 kJ/s है, पवन चाल और स्टैक गैस चाल क्रमश: 6 और 18 m/s है और ऊपरी सिरे पर स्टैक का अंत:व्यास 3 m है । हॉलैंड सूत्र की सहायता से पिच्छक उत्थान आकलित कीजिए । *3*

(ख) चाँद और शनि पर गुरुत्व के कारण होने वाला त्वरण ज्ञात कीजिए, यदि निम्नलिखित आँकड़े दिए गए हों : *4*

$G = 6{\cdot}67 \times 10^{-11}\ m^3/kg$

	त्रिज्या	द्रव्यमान
चाँद	$1{\cdot}738 \times 10^6$ m	$7{\cdot}35 \times 10^{22}$ kg
शनि	$0{\cdot}6 \times 10^7$ m	$5{\cdot}6782 \times 10^{26}$ kg

(ग) बैक्टीरिया कोशिकाएँ उस क्षण में विभाजक कोशिकाओं के आयतन की समानुपाती दर से बढ़ती हैं । यदि प्रारंभिक समय t_0 पर विभाजक कोशिकाओं का आयतन V_0 हो, तो किसी भी समय t पर विभाजक कोशिकाओं का आयतन ज्ञात कीजिए । वह समय ज्ञात कीजिए जब कोशिकाओं का आयतन उसके मूल आमाप का दुगुना हो जाएगा । *3*

7. (क) दो खिलाड़ियों के लिए नीचे दी गई भुगतान-सारणी लीजिए :

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A}\quad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 6 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

(i) खेल का पल्याण बिन्दु और मान ज्ञात कीजिए ।

(ii) उपर्युक्त भुगतान-सारणी के लिए दो तुल्य रैखिक प्रोग्रामन समस्याएँ दीजिए । *6*

(ख) यदि धमनी की लम्बाई 3 सेमी, त्रिज्या 6×10^{-3} सेमी और चालक बल 5×10^{3} dynes/cm^{2} हो, तब रक्त का औसत वेग और रक्त का अधिकतम शिखर वेग ज्ञात कीजिए । *4*