

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

December, 2017

01982

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-11 : PROBABILITY AND STATISTICS**

Time : 2 hours

*Maximum Marks : 50
(Weightage : 70%)*

Note : Question no. 7 is compulsory. Answer any four questions from questions no. 1 to 6. Use of calculators is not allowed.

1. (a) A frequency distribution gave the following results :

(i) Coefficient of variation = 5

(ii) Standard deviation (σ) = 2

(iii) Coefficient of skewness = 0.5

Find the mean and mode of the distribution. 4

(b) An unbiased coin is tossed until there are either two consecutive heads or two consecutive tails or the number of tosses becomes five. Describe the sample space. 3

- (c) Let X_1, X_2, \dots, X_n be a random sample from the following probability density function :

$$f(x, \theta) = \theta e^{-\theta x}, \quad x \geq 0, \theta > 0$$

Estimate θ by the method of moments. 3

2. (a) The random vector (X, Y) has the joint density function given by

$$f(x, y) = \begin{cases} 10xy^2, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- (i) Find the marginal density functions of X and Y .
(ii) Find the conditional density $f(y|x)$.
(iii) Compute

$$P\left(Y > \frac{1}{2} \mid X = \frac{1}{4}\right). \quad 6$$

- (b) Three machines X, Y, Z , with capacities proportional to $2 : 3 : 4$ are producing bullets. The probabilities that the machines produce defective bullets are $0.1, 0.2$ and 0.1 respectively. A bullet is taken at random and found to be defective. From which machine is the selected bullet produced ? What is the probability that it is not produced by machine X ? 4

3. (a) The first three moments of a distribution about the value 2 are 1, 16 and -40 respectively. Find the mean, variance and the third moment about the mean. Hence find the coefficient of skewness. 4

(b) Let the random variable X with the probability density function

$$f(x) = 2x; 0 < x < 1.$$

Find :

(i) the p.d.f. of $Y = 8X^3$

(ii) $E(Y)$ and $\text{Var}(Y)$.

Also show that $E(Y) = E(8X^3)$. 6

4. (a) The probability that a patient recovers from a delicate heart operation is 0.8 . What is the probability that

(i) exactly 2 of the next three patients who have this operation survive ?

(ii) all of the next three patients who have this operation do not survive ?

(iii) all of the next three patients who have this operation survive ? 4

(b) Develop a test for testing

$$H_0 : f(x) = 2x; 0 < x < \frac{1}{2}, f(x) = 2(1-x); \frac{1}{2} \leq x < 1$$

against $H_1 : f(x) = 1; 0 < x < 1$

based on a sample of size $n = 1$. Also find an expression for size and power of the test. 6

5. (a) An urn contains a large number of four different coloured balls – red, black, yellow and green. A sample of 24 balls drawn at random from the urn showed 4 red, 6 black, 8 yellow and 6 green balls. At 5% level of significance, test whether the urn contains equal proportions of these four coloured balls.

4

[You may use the following values :

$$\chi_{3,0.05}^2 = 7.815, \chi_{4,0.05}^2 = 9.488,$$

$$\chi_{3,0.01}^2 = 11.341]$$

- (b) The probability that a Poisson variate X takes a positive value is $(1 - e^{-1.5})$. Find the variance and also the probability that X lies between -1.5 and 1.5 .

3

- (c) Let X_1, X_2, \dots, X_n be a random sample from a normal population with mean zero and variance σ^2 . Construct an unbiased

estimator of σ as a function of $\sum_{i=1}^n |X_i|$.

3

6. (a) In a manufacturing organisation, the distribution of wages is perfectly normal with a workforce of 5000. The mean wages and standard deviation are calculated to be ₹ 800 per month and ₹ 200 respectively.

Estimate :

- (i) The number of workers earning ₹ 700 to ₹ 900 per month.
- (ii) Percentage of workers earning above ₹ 1,000 per month.

4

[You may use the following values :

$$P(Z \geq 1) = 0.1587, P(Z \geq 0.5) = 0.3085]$$

- (b) The HR manager of a multinational company wants to determine the relationship between experience and income of employees. The following data are collected from 9 randomly selected employees.

<i>Experience (in years)</i>	<i>Income (in thousand rupees)</i>
2	30
4	40
5	45
6	35
7	50
8	60
9	70
10	65
12	60

Identify the dependent and independent variables. Develop a regression model to predict income based on experience.

6

7. Which of the following statements are *true* or *false*? Give reasons for your answer. $5 \times 2 = 10$

- (a) There is no difference between qualitative and quantitative variables.
 - (b) For a standard exponential distribution, mean is 0 and variance is 1.
 - (c) If T is an unbiased estimator for θ , then T^2 is an unbiased estimator for θ^2 .
 - (d) Geometric distribution is a particular distribution obtained from Binomial distribution.
 - (e) If the m.g.f. of X is $M_X(t) = \exp(32t^2)$, then $E(X) = 0$ and $\text{Var}(X) = 64$.
-

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2017

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-11 : प्राथिकता और सांख्यिकी

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50
(भारिता : 70%)

नोट : प्रश्न सं. 7 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटर्स का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (क) एक बारंबारता बंटन निम्नलिखित परिणाम देता है :

(i) विचरण गुणांक = 5

(ii) मानक विचलन (σ) = 2

(iii) वैषम्य गुणांक = 0.5

बंटन का माध्य और बहुलक ज्ञात कीजिए।

4

(ख) एक अनभिनत सिक्के को तब तक उछाला जाता है जब तक कि दो बार लगातार चित या दो बार लगातार पट या उछालों की संख्या पाँच न हो जाए। प्रतिदर्श समष्टि परिकलित कीजिए।

3

- (ग) मान लीजिए X_1, X_2, \dots, X_n निम्नलिखित प्रायिकता घनत्व फलन वाले बंटन से लिया गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है :

$$f(x, \theta) = \theta e^{-\theta x}, \quad x \geq 0, \theta > 0$$

आघूर्ण विधि द्वारा θ आकलित कीजिए ।

3

2. (क) यादृच्छिक सदिश (X, Y) का संयुक्त घनत्व फलन निम्नलिखित है :

$$f(x, y) = \begin{cases} 10xy^2, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

- (i) X और Y के उपांत घनत्व फलन ज्ञात कीजिए ।
(ii) सप्रतिबंध घनत्व $f(y|x)$ ज्ञात कीजिए ।
(iii) $P\left(Y > \frac{1}{2} \mid X = \frac{1}{4}\right)$ परिकलित कीजिए ।

6

- (ख) तीन मशीनें X, Y, Z , जिनकी क्षमताओं का समानुपात $2 : 3 : 4$ है, गोलियाँ बनाती हैं । मशीनों द्वारा खराब गोलियाँ बनाने की प्रायिकताएँ क्रमशः $0.1, 0.2$ और 0.1 हैं । एक गोली यादृच्छया चुनी जाती है और खराब पाई जाती है । चुनी हुई गोली कौन-सी मशीन से बनी है ? वह प्रायिकता क्या है कि यह मशीन X से नहीं बनी है ?

4

3. (क) एक बंटन का मान 2 के सापेक्ष पहले तीन आघूर्ण क्रमशः 1, 16 और -40 हैं। माध्य, प्रसरण और माध्य के सापेक्ष तृतीय आघूर्ण ज्ञात कीजिए। इस प्रकार वैषम्य गुणांक ज्ञात कीजिए।

4

- (ख) मान लीजिए X निम्नलिखित प्रायिकता घनत्व फलन वाला यादृच्छिक चर है :

$$f(x) = 2x; 0 < x < 1.$$

ज्ञात कीजिए :

- (i) $Y = 8X^3$ का प्रा.घ.फ.
(ii) $E(Y)$ और $\text{Var}(Y)$.

यह भी दर्शाइए कि $E(Y) = E(8X^3)$.

6

4. (क) एक रोगी के एक सूक्ष्म दिल के ऑपरेशन के बाद ठीक होने की प्रायिकता 0.8 है। वह प्रायिकता क्या है कि

- (i) अगले तीन रोगी, जिनका यह ऑपरेशन हुआ है, में से ठीक 2 जीवित रहते हैं ?
(ii) अगले तीन रोगी, जिनका यह ऑपरेशन हुआ है, सभी जीवित नहीं रहते हैं ?
(iii) अगले तीन रोगी, जिनका यह ऑपरेशन हुआ है, सभी जीवित रहते हैं ?

4

(ख) $H_1 : f(x) = 1; 0 < x < 1$ के विरुद्ध

$$H_0 : f(x) = 2x; 0 < x < \frac{1}{2}, f(x) = 2(1-x); \frac{1}{2} \leq x < 1$$

का परीक्षण करने के लिए प्रतिदर्श की आमाप $n = 1$ के आधार पर एक परीक्षण विकसित कीजिए। परीक्षण की क्षमता और आमाप के लिए एक व्यंजक भी ज्ञात कीजिए।

6

5. (क) एक कलश में बड़ी संख्या में चार अलग-अलग लाल, काले, पीले और हरे रंगों की गेंदें हैं। कलश में से यादृच्छया निकाली गई 24 गेंदों के एक प्रतिदर्श में 4 लाल, 6 काली, 8 पीली और 6 हरी गेंदें हैं। 5% सार्थकता स्तर पर परीक्षण कीजिए कि कलश में चारों रंगों की गेंदों का समानुपात समान है।

4

[आप निम्नलिखित मानों का प्रयोग कर सकते हैं :

$$\chi_{3,0.05}^2 = 7.815, \chi_{4,0.05}^2 = 9.488,$$

$$\chi_{3,0.01}^2 = 11.341]$$

- (ख) एक प्वासों चर X के धनात्मक मान लेने की प्रायिकता $(1 - e^{-1.5})$ है। प्रसरण ज्ञात कीजिए और X के -1.5 और 1.5 के बीच होने की प्रायिकता भी ज्ञात कीजिए।

3

- (ग) मान लीजिए X_1, X_2, \dots, X_n माध्य शून्य और प्रसरण σ^2 वाले प्रसामान्य समष्टि से लिया गया एक यादृच्छिक

प्रतिदर्श है। $\sum_{i=1}^n |X_i|$ के एक फलन के रूप में σ का

अनभिन्नत आकलन प्राप्त कीजिए।

3

6. (क) एक उत्पादक संगठन में, वेतन का बंटन 5000 कर्मचारियों के बीच पूरी तरह से प्रसामान्य है। माध्य वेतन और मानक विचलन क्रमशः ₹ 800 प्रति माह और ₹ 200 परिकल्पित किए गए हैं।

आकलित कीजिए :

- (i) प्रति माह ₹ 700 से ₹ 900 कमाने वाले कर्मचारियों की संख्या ।
- (ii) प्रति माह ₹ 1,000 से अधिक कमाने वाले कर्मचारियों की प्रतिशतता ।

4

[आप निम्नलिखित मानों का प्रयोग कर सकते हैं :

$$P(Z \geq 1) = 0.1587, P(Z \geq 0.5) = 0.3085]$$

- (ख) एक बहुराष्ट्रीय कम्पनी का HR प्रबंधक, कर्मचारियों के अनुभव और आय में संबंध निकालना चाहता है । यादृच्छया चुने गए 9 कर्मचारियों से निम्नलिखित आँकड़े एकत्र किए गए हैं ।

अनुभव (वर्षों में)	आय (हजार रुपयों में)
2	30
4	40
5	45
6	35
7	50
8	60
9	70
10	65
12	60

स्वतंत्र और अस्वतंत्र चर पहचानिए । अनुभव के आधार पर आय का पूर्वानुमान करने के लिए एक समाश्रयण निदर्श विकसित कीजिए ।

6

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं अथवा असत्य ? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए । 5×2=10

(क) गुणात्मक और मात्रात्मक चरों में कोई अंतर नहीं होता है ।

(ख) मानक चरघातांकी बंटन के लिए माध्य 0 और प्रसरण 1 होता है ।

(ग) यदि T, θ का अनभिनत आकलक है, तो T^2, θ^2 का अनभिनत आकलक होता है ।

(घ) गुणोत्तर बंटन, द्विपद बंटन से प्राप्त एक विशिष्ट बंटन है ।

(ङ) यदि X का आ.ज.फ. $M_X(t) = \exp(32t^2)$ है, तो $E(X) = 0$ और $\text{Var}(X) = 64$ होगा ।
