No. of Printed Pages : 12

MTE-10

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2017

02932

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Answer any **five** questions. All computations may be done up to 3 decimal places. Use of calculators is **not** allowed. Symbols have their usual meanings.*

---

1. (a) Perform one iteration of the Birge-Vieta method with initial approximation $p_0 = 0{\cdot}5$, to find the root of the equation

$$x^3 - 6x + 1 = 0.$$ *3*

(b) Show that the iteration scheme

$$x_{n+1} = \frac{\sin(x_n)}{x_n}$$ converges for all $x_n > 2$. *2*

(c) Use Newton's divided difference interpolation to approximate the value of f(5) from the following data : 5

x	f(x)
1	0
3	2
4	1
6	–1
7	4

2. (a) Using Gershgorin bounds, find the estimates of the eigenvalues of the matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Draw a rough sketch of the bounds. 5

(b) Obtain a third degree Taylor's polynomial approximation to the function $f(x) = (x - 1)^{-5}$ about $x = 0$. Also find the maximum truncation error if $x \in [0, 0{\cdot}5]$. 5

3. (a) Find an interval of unit length which contains the real root of

$$f(x) = x^3 - 5x + 1 = 0.$$

Construct a fixed point iteration $x = g(x)$, which converges. Verify the condition of convergence. Take the mid-point of this interval as a starting approximation and iterate twice. *5*

(b) The second divided difference $f[x_0, x_1, x_2]$ can be written as

$$f[x_0, x_1, x_2] = af(x_0) + bf(x_1) + cf(x_2).$$

Find the expressions for a, b, c. *3*

(c) Given the equation

$$y' = x + \frac{1}{x-1}, \; y(0) = 1,$$

show that it is sufficient to use Euler's method with step size $h = 0{\cdot}2$ to compute $y(0{\cdot}2)$ with an error less than $0{\cdot}02$. *2*

4. (a) Use the classical Runge-Kutta fourth order method to find the approximate value of y at $x = 1{\cdot}1$ for

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y},\ y(1) = 2,\ h = 0{\cdot}1. \qquad 4$$

(b) Prove that : 2

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta^2 f_i = \Delta f_n - \Delta f_0$$

(c) The velocity of a vehicle beginning from rest is given in the following table for part of the first hour. Using Simpson's $\frac{1}{3}$ rule, find the distance travelled by the vehicle in this hour. 4

t = time in minutes	v = velocity km/hr
10	80
20	60
30	70
40	75
50	70
60	80

5. (a) Using Lagrange's method find the curve passing through the points (0, 18), (1, 10), (3, –18) and (6, 90). Also find the slope of the curve at $x = 2$. *5*

(b) Set up the Gauss-Seidel iteration scheme in matrix form for solving the system of equations

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad 5$$

6. (a) Perform three iterations of Newton-Raphson method to find the root of the equation $x^4 - x + 1 = 0$ with initial approximation $x_0 = 0$. *3*

(b) Does the equation $x^7 + x^5 + x^3 + 5x - 6 = 0$ have a negative real root ? Give reasons. *2*

(c) Perform three iterations of the power method to find the largest eigenvalue in magnitude and the corresponding eigenvector for the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Use $v^{(0)} = [1 \quad 1 \quad 1]^T$ as the initial approximation. *5*

7. (a) Solve the linear system of equations

$$x - y + 5z = 5$$
$$2x - 3y + z = 0$$
$$x + 3y + 7z = 11$$

using LU decomposition method. *5*

(b) Find the rate of convergence of the iteration method

$$x_{k+1} = \frac{x_0 f(x_k) - x_k f(x_0)}{f(x_k) - f(x_0)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Also obtain the asymptotic error constant. *5*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2017

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी अभिकलन 3 दशमलव स्थानों तक दिए जा सकते हैं । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं ।*

---

1. (क) आदि सन्निकटन $p_0 = 0{\cdot}5$ लेकर बर्ज-विएटा विधि की एक पुनरावृत्ति करके समीकरण $x^3 - 6x + 1 = 0$ का मूल ज्ञात कीजिए । 3

(ख) दिखाइए कि सभी $x_n > 2$ के लिए पुनरावृत्ति योजना $x_{n+1} = \frac{\sin(x_n)}{x_n}$ अभिसरित होती है । 2

(ग) निम्नलिखित आँकड़ों से f(5) के मान का सन्निकटन करने के लिए न्यूटन के विभाजित अंतर अंतर्वेशन का प्रयोग कीजिए : 5

x	f(x)
1	0
3	2
4	1
6	–1
7	4

2. (क) गर्शगोरिन परिबंधों द्वारा आव्यूह

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

के आइगेनमान आकलित कीजिए । परिबंधों का रेखांकन मोटे तौर पर कीजिए । 5

(ख) $x = 0$ पर फलन $f(x) = (x - 1)^{-5}$ का घात तीन वाला टेलर बहुपद सन्निकटन प्राप्त कीजिए । यदि $x \in [0, 0{\cdot}5]$ हो, तो अधिकतम रुंडन त्रुटि भी ज्ञात कीजिए । 5

3. (क) एकक लंबाई वाला वह अंतराल ज्ञात कीजिए जो समीकरण

$$f(x) = x^3 - 5x + 1 = 0$$

के वास्तविक मूल को अंतर्विष्ट करता हो । नियत बिंदु पुनरावृत्ति $x = g(x)$ प्राप्त कीजिए जो अभिसरित हो । अभिसरण के प्रतिबंध की जाँच कीजिए । इस अंतराल के मध्य-बिंदु को प्रारंभिक सन्निकटन मान कर दो पुनरावृत्ति कीजिए । 5

(ख) द्वितीय विभाजित अंतर $f[x_0, x_1, x_2]$ को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$f[x_0, x_1, x_2] = af(x_0) + bf(x_1) + cf(x_2).$$

a, b, c के व्यंजक ज्ञात कीजिए । 3

(ग) दिए गए समीकरण

$$y' = x + \frac{1}{x-1}, y(0) = 1$$

के लिए 0·02 से कम त्रुटि के साथ $y(0·2)$ प्राप्त करने के लिए दिखाइए कि सोपान आमाप $h = 0·2$ लेकर ऑयलर विधि का प्रयोग पर्याप्त होगा । 2

4. (क) चिरप्रतिष्ठित चतुर्थ कोटि रूंगे-कुट्टा विधि द्वारा समस्या

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, \; y(1) = 2$$

के लिए सोपान आमाप $h = 0{\cdot}1$ लेकर $x = 1{\cdot}1$ पर y का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए । *4*

(ख) सिद्ध कीजिए कि : *2*

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta^2 f_i = \Delta f_n - \Delta f_0$$

(ग) विश्रामावस्था से आरंभ कर रही एक गाड़ी का वेग पहले घंटे के लिए निम्नलिखित तालिका में दिया गया है । सिम्प्सन का $\frac{1}{3}$ नियम लागू करके, इस घंटे में गाड़ी द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए । *4*

t = समय मिनटों में	v = वेग किमी/घंटे में
10	80
20	60
30	70
40	75
50	70
60	80

5. (क) लग्रांज विधि द्वारा बिंदुओं (0, 18), (1, 10), (3, –18) और (6, 90) से होकर जाने वाला वक्र ज्ञात कीजिए । $x = 2$ पर वक्र की प्रवणता भी ज्ञात कीजिए । 5

(ख) समीकरण निकाय

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

का हल प्राप्त करने के लिए गाउस-सीडल पुनरावृत्ति योजना को आव्यूह रूप में स्थापित कीजिए । 5

6. (क) $x_0 = 0$ को प्रारंभिक सन्निकटन मान कर समीकरण $x^4 - x + 1 = 0$ का मूल ज्ञात करने के लिए न्यूटन-रैफ्सन विधि की तीन पुनरावृत्तियाँ कीजिए । 3

(ख) क्या समीकरण $x^7 + x^5 + x^3 + 5x - 6 = 0$ का ऋणात्मक वास्तविक मूल है ? कारण बताइए । 2

(ग) घात विधि की तीन पुनरावृत्तियाँ करके आव्यूह

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

का परिमाण में बृहत्तम् आइगेनमान और संगत आइगेनसदिश ज्ञात कीजिए । आदि सन्निकटन के रूप में $v^{(0)} = [1 \quad 1 \quad 1]^T$ का प्रयोग कीजिए । 5

7. (क) LU वियोजन विधि द्वारा रैखिक समीकरण निकाय

$$x - y + 5z = 5$$
$$2x - 3y + z = 0$$
$$x + 3y + 7z = 11$$

को हल कीजिए । *5*

(ख) पुनरावृत्ति विधि

$$x_{k+1} = \frac{x_0 f(x_k) - x_k f(x_0)}{f(x_k) - f(x_0)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

की अभिसरण दर ज्ञात कीजिए । उपगामी त्रुटि अचर भी प्राप्त कीजिए । *5*