

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

00152

December, 2017

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-03 : MATHEMATICAL METHODS**

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. 7 is compulsory. Attempt any four questions from questions no. 1 to 6. Use of calculators is not allowed.*

1. (a) Find the domain and range of the function

$$f(x) = \frac{1}{2 - \sin 3x} \quad 3$$

- (b) Evaluate : 3

$$\int \frac{dx}{x^{1/5} (1 + x^{4/5})^{1/2}} dx$$

- (c) Given that $X = 4Y + 5$ and $Y = kX + 4$ are the lines of regression of X on Y and Y on X respectively, find the range of values of k . If $k = \frac{1}{16}$, find the means of the two variables and the coefficient of correlation between them. 4

2. (a) The difference of mean and variance of a binomial distribution of 16 trials is 9. Find the probability of success p of the binomial distribution. Also find the probability of (i) exactly two successes and (ii) less than two successes. 4

- (b) Find the derivative of $\frac{\tan^{-1}(1+x^2)}{x}$ w.r.t. x . 3

- (c) Let

$$f(x) = \frac{\alpha x}{x+1}, x \neq -1.$$

Find the value of the constant α for which $f(f(x)) = x$. 3

3. (a) Let $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ be the sample space. Let A be the event that an even number turns up and let B be the event that a number divisible by 3 occurs. Find $P(A \cup B)$ and $P(A \cap B)$. 3

- (b) Solve the differential equation

$$(1 - x^2) \frac{dy}{dx} + xy = ax,$$

where a is a constant.

4

- (c) Find the unit vector perpendicular to each of the vectors $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ and $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

3

4. (a) A sample analysis of examination results of 100 students was made. It was found that 23 students had failed, 34 secured a third division, 31 secured a second division and the rest were placed in first division. At 5% level of significance, test whether these figures are in agreement with the general examination result which is in the ratio of 4 : 3 : 2 : 1 for various categories, respectively.

4

[You may use the following values :

$$\chi_{0.05, 3}^2 = 7.82, \chi_{0.05, 4}^2 = 9.49, \chi_{0.05, 5}^2 = 11.07]$$

(b) If

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+k} & , \quad -1 \leq x < 0 \\ 2x^2 + 3x + 2, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

is continuous at $x = 0$, find k . 3

(c) In an AP, the p^{th} term is q and the $(p + q)^{\text{th}}$ term is 0. Find the q^{th} term. 3

5. (a) Find the mean and standard deviation of the following heights of five persons :
120 cm, 140 cm, 150 cm, 160 cm, 180 cm. 3

(b) If 20 is divided into two parts such that the product of one part and the cube of the other part is maximum, then find both the parts. 4

(c) Find the point of intersection of the plane $3x - 2y + 3z - 2 = 0$ and the line

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2}. \quad 3$$

6. (a) Suppose 5 students are enrolled in a course. The amount of time (in hours) each student spends in studies per week is 7, 10, 12, 9, 17.

- (i) Compute the population mean.
- (ii) Calculate the sample means by selecting samples of three individuals.
- (iii) Find the mean of the sample means obtained in (ii) above.

4

(b) Let X be a continuous random variable with PDF as

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & 0 \leq x < \infty \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Find $E[X]$ and the cumulative distribution function of $f(x)$.

3

(c) Find the term free from x in the Binomial expansion of $\left(4x - \frac{5}{x^2}\right)^6$.

3

7. State whether the following statements are *true* or *false*, giving reasons in support of your answer. 5×2=10

- (i) The slope of a line parallel to x-axis is zero.
- (ii) If $f'(x) > 0$ in an interval $]a, b[$, then $f(x) > 0$ in $]a, b[$.
- (iii) If a pair of dice are rolled, A is the event that the sum is 7 and B is the event that the sum is 8, then A and B are not mutually exclusive.
- (iv) If $f: A \rightarrow B$ and $g: B \rightarrow C$ are such that $g \circ f$ is injective, then f and g are injective.
- (v) The normal curve for

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}; -\infty < x < \infty$ attains its maximum at $x = 0$.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2017

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-03 : गणितीय विधियाँ

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट: प्रश्न सं. 7 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटर्स का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (क) फलन

$$f(x) = \frac{1}{2 - \sin 3x}$$

का प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए। 3

(ख) मूल्यांकन कीजिए : 3

$$\int \frac{dx}{x^{1/5} (1 + x^{4/5})^{1/2}} dx$$

(ग) दिया गया है कि $X = 4Y + 5$ और $Y = kX + 4$
क्रमशः Y पर X और X पर Y की समाश्रयण रेखाएँ हों,
तो k के मानों का परिसर ज्ञात कीजिए। यदि $k = \frac{1}{16}$
हो, तो दोनों चरों का माध्य और उनके बीच सहसंबंध
गुणांक ज्ञात कीजिए। 4

2. (क) 16 परीक्षणों में एक द्विपद बंटन के माध्य और प्रसरण का अंतर 9 है। द्विपद बंटन में सफलता की प्रायिकता p ज्ञात कीजिए। यह भी ज्ञात कीजिए कि (i) ठीक दो सफलताएँ और (ii) दो से कम सफलताएँ प्राप्त करने की प्रायिकताएँ क्या हैं।

4

- (ख) x के सापेक्ष $\frac{\tan^{-1}(1+x^2)}{x}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

3

- (ग) मान लीजिए

$$f(x) = \frac{\alpha x}{x+1}, x \neq -1$$

है। तो अचर α का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $f(f(x)) = x$.

3

3. (क) मान लीजिए $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ एक प्रतिदर्श समष्टि है। मान लीजिए A सम संख्या प्राप्त करने की घटना है और मान लीजिए B 3 से भाज्य संख्या प्राप्त करने की घटना है। $P(A \cup B)$ और $P(A \cap B)$ ज्ञात कीजिए।

3

(ख) निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$(1 - x^2) \frac{dy}{dx} + xy = ax,$$

जहाँ a अचर है ।

4

(ग) वह एकक सदिश ज्ञात कीजिए जो सदिशों $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ और $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ पर लम्ब हो ।

3

4. (क) 100 छात्रों के परीक्षा परिणामों के एक प्रतिदर्श का विश्लेषण किया गया । यह पाया गया कि 23 छात्र फेल हो गए, 34 छात्र तीसरी श्रेणी में सफल हुए, 31 छात्र दूसरी श्रेणी में सफल हुए और बाकी शेष छात्र प्रथम श्रेणी में सफल हुए । 5% के सार्थकता स्तर पर यह जाँच कीजिए कि यह आँकड़े सामान्य परीक्षा परिणाम के अनुरूप हैं जो कि विभिन्न श्रेणियों के लिए क्रमशः 4 : 3 : 2 : 1 के अनुपात में हैं ।

4

[निम्नलिखित मान आपके लिए उपयोगी हो सकते हैं :

$$\chi_{0.05, 3}^2 = 7.82, \quad \chi_{0.05, 4}^2 = 9.49, \quad \chi_{0.05, 5}^2 = 11.07]$$

(ख) यदि

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+k} & , \quad -1 \leq x < 0 \\ 2x^2 + 3x + 2, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$x = 0$ पर संतत हो, तो k ज्ञात कीजिए । 3

(ग) एक समांतर श्रेढ़ी में, p वाँ पद q है और $(p + q)$ वाँ पद 0 है । श्रेढ़ी का q वाँ पद ज्ञात कीजिए । 3

5. (क) पाँच व्यक्तियों की निम्नलिखित ऊँचाई

120 cm, 140 cm, 150 cm, 160 cm, 180 cm

का माध्य और मानक विचलन ज्ञात कीजिए । 3

(ख) यदि 20 को दो भागों में इस प्रकार विभाजित किया गया कि एक भाग का गुणनफल और दूसरे भाग का घन अधिकतम हो, तो दोनों भाग ज्ञात कीजिए । 4

(ग) समतल $3x - 2y + 3z - 2 = 0$ और रेखा

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2} \text{ का प्रतिच्छेद बिंदु ज्ञात}$$

कीजिए । 3

6. (क) मान लीजिए एक पाठ्यक्रम में 5 छात्रों का नामांकन किया गया है। प्रत्येक छात्र पढ़ाई में प्रति सप्ताह समय (घंटों में) 7, 10, 12, 9, 17 लगाता है।

(i) समष्टि माध्य परिकलित कीजिए।

(ii) तीन व्यक्तियों के प्रतिदर्श लेकर प्रतिदर्श माध्य परिकलित कीजिए।

(iii) ऊपर (ii) में प्राप्त प्रतिदर्श माध्यों का माध्य ज्ञात कीजिए।

4

(ख) मान लीजिए X एक संतत यादृच्छिक चर है जिसका प्रायिकता घनत्व फलन यह है

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & 0 \leq x < \infty \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

$E(X)$ और $f(x)$ का संचयी बंटन फलन ज्ञात कीजिए।

3

(ग) $\left(4x - \frac{5}{x^2}\right)^6$ के द्विपद प्रसार में x से मुक्त पद ज्ञात कीजिए।

3

7. अपने उत्तर के समर्थन में कारण देते हुए बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य । 5×2=10

- (i) x -अक्ष के समानान्तर रेखा की प्रवणता शून्य होती है ।
- (ii) यदि अंतराल $]a, b[$ में $f'(x) > 0$, तो $]a, b[$ में $f(x) > 0$.
- (iii) यदि दो पासे एक साथ फेंके गए हैं, तो A वह घटना है जिसमें संख्याओं का जोड़ 7 है और B वह घटना है जिसमें संख्याओं का जोड़ 8 है, तब A और B परस्पर अपवर्जी नहीं हैं ।
- (iv) यदि $f : A \rightarrow B$ और $g : B \rightarrow C$ इस प्रकार हैं कि $g \circ f$ एकैकी है, तब f और g भी एकैकी होंगे ।
- (v) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$; $-\infty < x < \infty$ के लिए प्रसामान्य वक्र $x = 0$ पर अधिकतम होता है ।