No. of Printed Pages : 8

MTE-03(S)

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

00029

December, 2017

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-03(S) : MATHEMATICAL METHODS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Question no.* ***7*** *is* ***compulsory****. Do any* ***four*** *questions from questions no.* ***1*** *to* ***6****. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

1. (a) If function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ is defined by $f(x) = 4x + 1$, then show that f is a bijection. Find the formula that defines f^{-1}. *3*

(b) If $y = e^x + e^{-x}$, prove that $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - 4}$. *3*

(c) The difference of mean and variance of a binomial distribution of 9 trials is 4. Find the probability p of success of the binomial distribution. Also find the probability of

(i) exactly two successes, and

(ii) less than two successes. *4*

2. (a) The product of two positive real numbers is 25. Find the minimum value of their sum. *3*

(b) A and B are two events which are independent. The probability that both A and B occur is $\frac{1}{6}$ and the probability that neither of them occurs is $\frac{1}{3}$. Find

(i) the probability of the occurrence of A, and

(ii) the probability of the occurrence of B. *4*

(c) Find the unit vector perpendicular to each of the vectors $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ and $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Find the angle between the given vectors. *3*

3. (a) Find the point of intersection of the plane $3x - 2y + 3z - 2 = 0$ and the line $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2}$. *3*

(b) Verify Euler's theorem for the function $f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2$. *2*

(c) If X has the probability density function

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-3x}, & \text{for } x > 0 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases},$$

find

(i) the value of the constant k,

(ii) $P(0{\cdot}5 \le X \le 1)$,

(iii) the mean of X,

(iv) the variance of X. *5*

4. (a) Among 64 offsprings of a certain cross between guinea pigs, 34 were red, 10 were black and 20 were white. According to the genetic model, these numbers should be in the ratio 9 : 3 : 4. Are the data consistent with the model at 5% level ? 4

[The following values of χ^2 may be useful :

$\chi^2_{3,\, 0\cdot 05} = 7\cdot 81, \ \ \chi^2_{2,\, 0\cdot 05} = 5\cdot 99, \ \ \chi^2_{1,\, 0\cdot 05} = 3\cdot 84$]

(b) Solve the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = xy^3 - xy.$$ 4

(c) Evaluate : 2

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x^2 + 9} - 5}$$

5. (a) For five observations of pairs (x, y) of variables x and y, the following results are obtained :

$\Sigma x = 15$, $\Sigma y = 25$, $\Sigma x^2 = 55$, $\Sigma y^2 = 135$, $\Sigma xy = 83$

Find the two lines of regression. 4

(b) Suppose a protein of mass m disintegrates into amino acids according to the formula $m = \dfrac{28}{t + 2}$, where t indicates time. Find the average rate of reaction in the time interval $t = 0$ to $t = 2$. 3

(c) Find the term free of x in the binomial expansion of $\left(4x - \dfrac{5}{x^2}\right)^6$. 3

6. (a) A club has 9 members having ages 21, 28, 23, 29, 52, 43, 32, 37 and 30 years. One has to be at least 30 years of age to be eligible for the presidentship of the club. A simple random sample of size 5 is selected to provide an estimate of the population proportion eligible for presidentship. Find the mean and the standard error of this estimate. *3*

(b) Evaluate the integral

$$\int_0^2 x\sqrt{x+2}\, dx.$$ *4*

(c) Obtain the graph of the function f defined by $f(x) = x^2 + 4, \forall x \in \mathbf{R}$. *3*

7. State whether the following statements are *true* or *false*. Give reasons for your answers. *10*

(a) If a function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ is such that $f(x) = \cos(x + 2)$, then f is invertible.

(b) If the correlation coefficient between x and y is 0·5, then the correlation coefficient between 2x and y is 1.

(c) The mode of a given data, if it exists, is unique.

(d) The function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ defined as $f(x) = |x|$ is continuous.

(e) Type-I error is the same as the level of significance.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2017

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-03(S) : गणितीय विधियाँ

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट: *प्रश्न सं. **7** **अनिवार्य** है । प्रश्न सं. **1** से **6** में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

---

1. (क) यदि फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4x + 1$ द्वारा परिभाषित हो, तो दिखाइए कि f एकैकी आच्छादी है । f^{-1} को परिभाषित करने वाला सूत्र भी ज्ञात कीजिए । *3*

(ख) यदि $y = e^x + e^{-x}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - 4}$ । *3*

(ग) 9 परीक्षणों वाले एक द्विपद बंटन के माध्य और प्रसरण का अंतर 4 है । द्विपद बंटन की सफलता प्राप्त करने की प्रायिकता p ज्ञात कीजिए । निम्नलिखित प्रायिकताएँ भी ज्ञात कीजिए : *4*

(i) ठीक दो सफलताएँ प्राप्त करना ।

(ii) दो से कम सफलताएँ प्राप्त करना ।

2. (क) दो वास्तविक धनात्मक संख्याओं का गुणनफल 25 है । उनके योगफल का निम्नतम मान ज्ञात कीजिए । *3*

(ख) A और B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं । दोनों घटनाएँ A और B के घटित होने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है और दोनों में से किसी के भी घटित न होने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है । ज्ञात कीजिए

(i) A के घटित होने की प्रायिकता, तथा

(ii) B के घटित होने की प्रायिकता । *4*

(ग) यदि $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ और $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ हो, तो वह एकक सदिश ज्ञात कीजिए जो सदिशों **a** और **b** पर लंब हो । दिए गए सदिशों के बीच का कोण भी ज्ञात कीजिए । *3*

3. (क) समतल $3x - 2y + 3z - 2 = 0$ और रेखा $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2}$ का प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए । *3*

(ख) फलन $f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2$ के लिए ऑयलर प्रमेय सत्यापित कीजिए । *2*

(ग) यदि X का प्रायिकता घनत्व फलन

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-3x}, & x > 0 \text{ के लिए} \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

हो, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए : *5*

(i) अचर k का मान

(ii) $P(0{\cdot}5 \le X \le 1)$

(iii) X का माध्य

(iv) X का प्रसरण

4. (क) गिनी-पिग के बीच सहवास से पैदा हुए 64 बच्चों में से 34 लाल, 10 काले और 20 सफेद बच्चे थे । जेनेटिक निदर्श के अनुसार इन संख्याओं का अनुपात 9 : 3 : 4 होना चाहिए । क्या 5% स्तर पर ये आँकड़े निदर्श के सुसंगत हैं ? *4*

[χ^2 के निम्नलिखित मान आपके लिए उपयोगी हो सकते हैं :

$\chi^2_{3,\, 0\cdot05} = 7\cdot81, \quad \chi^2_{2,\, 0\cdot05} = 5\cdot99, \quad \chi^2_{1,\, 0\cdot05} = 3\cdot84$]

(ख) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = xy^3 - xy$ को हल कीजिए । *4*

(ग) मूल्यांकन कीजिए : *2*

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x^2 + 9} - 5}$$

5. (क) चरों x और y के पाँच प्रेक्षण-युग्मों (x, y) के लिए निम्नलिखित परिणाम प्राप्त हुए :

$\Sigma x = 15, \Sigma y = 25, \Sigma x^2 = 55, \Sigma y^2 = 135,$
$\Sigma xy = 83$

दो समाश्रयण रेखाएँ ज्ञात कीजिए । *4*

(ख) मान लीजिए द्रव्यमान m का प्रोटीन सूत्र $m = \frac{28}{t+2}$ के अनुसार ऐमीनो अम्लों में विभक्त होता है, जहाँ t समय को सूचित करता है । समय अंतराल t = 0 से t = 2 में औसत प्रतिक्रिया दर ज्ञात कीजिए । *3*

(ग) $\left(4x - \frac{5}{x^2}\right)^6$ के द्विपद प्रसार में वह पद ज्ञात कीजिए जो x से मुक्त हो । *3*

6. (क) एक क्लब में 9 सदस्य हैं जिनकी आयु 21, 28, 23, 29, 52, 43, 32, 37 और 30 वर्ष है । क्लब के अध्यक्ष पद के लिए पात्र व्यक्ति का कम-से-कम 30 वर्ष का होना ज़रूरी है । अध्यक्ष पद के लिए योग्य समष्टि अनुपात का आकलन करने के लिए आमाप 5 के सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श को चुना जाता है । इस आकलन का माध्य और मानक त्रुटि ज्ञात कीजिए । *3*

(ख) समाकल $\int_0^2 x\sqrt{x+2}\,dx$ का मूल्यांकन कीजिए । *4*

(ग) $f(x) = x^2 + 4, \forall x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित फलन f का ग्राफ बनाइए । *3*

7. बताइए कि निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं या *असत्य* । अपने उत्तर के कारण बताइए । *10*

(क) यदि $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ एक ऐसा फलन है जिसके लिए $f(x) = \cos(x + 2)$, तब f व्युत्क्रमणीय होगा ।

(ख) यदि x और y के बीच सहसंबंध गुणांक 0·5 है, तब 2x और y के बीच सहसंबंध गुणांक 1 होगा ।

(ग) यदि दिए हुए आँकड़ों के लिए बहुलक का अस्तित्व हो, तो वह अद्वितीय होता है ।

(घ) $f(x) = |x|$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ संतत है ।

(ङ) टाइप-I त्रुटि सार्थकता स्तर के बराबर होती है ।