No. of Printed Pages : 8

MTE-02

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

02942

Term-End Examination

December, 2017

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-02 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. 7 is* ***compulsory****. Attempt any* ***four*** *questions from questions no.* ***1*** *to* ***6****. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

---

1. (a) Let V be the vector space of all $n \times n$ matrices over $\mathbf{R}$. What is the dimension of V over $\mathbf{R}$? Further, let

$W_n = \{A_{n \times n} \in V \mid A_{n \times n} \text{ is upper triangular}\}$.

Check whether or not W is a subspace of V. *3*

(b) Check whether or not the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

is diagonalisable. If it is, find a matrix P and a diagonal matrix D such that $P^{-1} A P = D$. If A is not diagonalisable, find Adj(A). *7*

2. (a) Let $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ be a set of linearly independent vectors of a vector space V over $\mathbf{R}$. Define $T : \mathbf{R}^n \to V$ by

$$T((\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$$

for all $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$.

(i) Check whether or not T is a linear transformation.

(ii) Can the dimension of V over $\mathbf{R}$ be $(n - 1)$? Give reasons for your answer. 3

(b) Let

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Find A^4 using the Cayley-Hamilton theorem. Further, is A invertible ? Give reasons for your answer. 7

3. (a) Let $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ be the linear transformation given by $T((x, y, z)) = (2x + y, 3y + z, z - 2x)$ for all $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

(i) Find the matrix of T with respect to the basis $\{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ of $\mathbf{R}^3$.

(ii) Check whether or not T^{-1} exists. If T^{-1} exists, write $T^{-1}((x, y, z))$ for $x, y, z \in \mathbf{R}$. If T^{-1} does not exist, find the minimal polynomial of T. 7

(b) Find the range space R(T) and the kernel ker (T) of the linear transformation T given by $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$,

$T((x, y, z)) = (-2x, 5x + y)$ for all $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. *3*

4. (a) Can the following system of equations be solved by Cramer's rule ? If it can, apply the rule for solving it. Otherwise, solve it by the Gaussian elimination method. *4*

$$3x + 3y - 5z = 3$$
$$x + 2y + z = -1$$
$$2x + y - 6z = 4$$

(b) Apply the Gram-Schmidt orthogonalisation process to find an orthonormal basis for the subspace of $\mathbf{C}^4$ generated by the vectors

$\{(1, i, 0, 1), (1, 0, i, 0), (-i, 0, 1, -1)\}$. *6*

5. (a) Let

$$P_5 = \left\{ \sum_{i=0}^{5} a_i x^i \;\middle|\; a_i \in \mathbf{R} \right\} \text{ and}$$

$$W = \left\{ \sum_{i=0}^{5} a_i x^i \;\middle|\; a_0 = a_2 = a_4 = 0, a_i \in \mathbf{R} \right\}.$$

It is given that P_5 is a vector space over $\mathbf{R}$ and W is a subspace of P_5.

(i) Under what condition on elements p and q of P_5 will $p + W = q + W$?

(ii) Find a subspace U of P_5 such that $W \oplus U = P_5$.

(iii) What is the dimension of U ? *6*

(b) For $\alpha \in \mathbf{C}$, let $T : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ be the linear transformation defined by $T(v) = \alpha v$. Find the adjoint of T with respect to the standard inner product on $\mathbf{C}^n$. Under what conditions on α will T be Hermitian ? Under what conditions on α will T be unitary ? Give reasons for your answers. *4*

6. (a) Find the orthogonal canonical reduction of the quadratic form $Q \equiv 3x^2 + 2y^2 - 2\sqrt{2}\,xy$. Also give its principal axes. Finally, draw a rough sketch of the orthogonal canonical reduction of $Q = 4$. *5*

(b) Find the radius of the circular section of the sphere $|\mathbf{r} - \mathbf{c}| = 7$ by the plane

$\mathbf{r}.\,(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 2\sqrt{7}$, where $\mathbf{c} = (-1, 0, 1)$. *3*

(c) Prove that if A is an invertible matrix, then so is Adj(A). *2*

7. Which of the following statements are *true* ? Give reasons for your answers. *5×2=10*

(a) If $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$, then rank (A) = det (A).

(b) There is one and only one unitary matrix in $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$.

(c) If U and V are subspaces of a vector space W over $\mathbf{R}$, then $U \cup V$ is also a subspace of W.

(d) Given a linear transformation T from $\mathbf{R}^4$ to $\mathbf{R}^6$, rank (T) + nullity (T) = 6.

(e) The relation R, defined on the set of lines in $\mathbf{R}^2$ by 'l_1 R l_2 iff l_1 and l_2 intersect', is an equivalence relation.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2017

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-02 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट : *प्रश्न सं. 7 अनिवार्य है । प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं* ***चार*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।*

---

1. (क) मान लीजिए V, **R** पर सभी $n \times n$ आव्यूहों की सदिश समष्टि है । **R** पर V की विमा क्या है ? इसके आगे, मान लीजिए

$W_n = \{A_{n \times n} \in V \mid A_{n \times n}$ उपरि त्रिभुज है$\}$ ।

जाँच कीजिए कि W, V की उपसमष्टि है या नहीं । *3*

(ख) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित आव्यूह विकर्णनीय है या नहीं :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

यदि है, तो ऐसा आव्यूह P और विकर्ण आव्यूह D ज्ञात कीजिए जिसके लिए $P^{-1} A P = D$ । यदि A विकर्णनीय नहीं है, तो Adj(A) ज्ञात कीजिए । *7*

2. (क) मान लीजिए $\{v_1, v_2 \ldots, v_n\}$, $\mathbf{R}$ पर सदिश समष्टि V के रैखिकत: स्वतंत्र सदिशों का समुच्चय है । सभी $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$ के लिए

$T((\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$

द्वारा $T : \mathbf{R}^n \to V$ को परिभाषित कीजिए ।

(i) जाँच कीजिए कि T रैखिक रूपांतरण है या नहीं ।

(ii) क्या $\mathbf{R}$ पर V की विमा $(n - 1)$ हो सकती है ? अपने उत्तर के कारण बताइए । 3

(ख) मान लीजिए

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

कैली-हैमिल्टन प्रमेय द्वारा A^4 ज्ञात कीजिए । इसके आगे, क्या A व्युत्क्रमणीय है ? अपने उत्तर के कारण बताइए । 7

3. (क) मान लीजिए $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, सभी $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ के लिए $T((x, y, z)) = (2x + y,\ 3y + z,\ z - 2x)$ द्वारा दिया गया एक रैखिक रूपांतरण है ।

(i) $\mathbf{R}^3$ के आधार $\{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 0, 1)$ के सापेक्ष T का आव्यूह ज्ञात कीजिए ।

(ii) जाँच कीजिए कि T^{-1} का अस्तित्व है या नहीं । यदि T^{-1} का अस्तित्व है, तो $x, y, z, \in \mathbf{R}$ के लिए $T^{-1}((x, y, z))$ लिखिए । यदि T^{-1} का अस्तित्व नहीं है, तो T का अल्पिष्ठ बहुपद ज्ञात कीजिए । 7

(ख) सभी $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ के लिए $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $T((x, y, z)) = (-2x, 5x + y)$ द्वारा परिभाषित रैखिक रूपांतरण T की परिसर समष्टि R(T) और अष्टि ker (T) ज्ञात कीजिए । 3

4. (क) क्या निम्नलिखित समीकरण-निकाय को क्रैमर नियम से हल किया जा सकता है ? यदि किया जा सकता है, तो इसे हल करने के लिए इस नियम को लागू कीजिए । अन्यथा, इसे गाउसीय निराकरण विधि से हल कीजिए । 4

$$3x + 3y - 5z = 3$$
$$x + 2y + z = -1$$
$$2x + y - 6z = 4$$

(ख) ग्राम-श्मिट लांबिकीकरण प्रक्रम से सदिशों $\{(1, i, 0, 1), (1, 0, i, 0), (-i, 0, 1, -1)\}$ द्वारा जनित $\mathbf{C}^4$ की उपसमष्टि के लिए प्रसामान्य लांबिक आधार ज्ञात कीजिए । 6

5. (क) मान लीजिए

$$P_5 = \left\{ \sum_{i=0}^{5} a_i x^i \,\middle|\, a_i \in \mathbf{R} \right\} \text{ और}$$

$$W = \left\{ \sum_{i=0}^{5} a_i x^i \,\middle|\, a_0 = a_2 = a_4 = 0, a_i \in \mathbf{R} \right\}.$$

यह दिया गया है कि P_5, **R** पर एक सदिश समष्टि है और W, P_5 की उपसमष्टि है ।

(i) किस प्रतिबंध के अधीन P_5 के अवयवों पर p और q के लिए $p + W = q + W$ होगा ?

(ii) P_5 की ऐसी उपसमष्टि U ज्ञात कीजिए जिसके लिए $W \oplus U = P_5$.

(iii) U की विमा क्या है ? 6

(ख) $\alpha \in \mathbf{C}$ के लिए, मान लीजिए $T : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$, $T(v) = \alpha v$ द्वारा परिभाषित रैखिक रूपांतरण है । $\mathbf{C}^n$ पर मानक आंतर गुणनफल के सापेक्ष T का सहखंडज ज्ञात कीजिए । α पर किन प्रतिबंधों के अधीन T हर्मिटी होगा ? α पर किन प्रतिबंधों के अधीन T ऐकिक होगा ? अपने उत्तरों के कारण बताइए । *4*

6. (क) द्विघाती समघात $Q \equiv 3x^2 + 2y^2 - 2\sqrt{2}\,xy$ का लांबिक विहित समानयन ज्ञात कीजिए । इसके मुख्य अक्ष भी बताइए । अंततः Q = 4 के लांबिक विहित समानयन का स्थूल चित्र भी बनाइए । *5*

(ख) गोले $|\mathbf{r} - \mathbf{c}| = 7$ का समतल $\mathbf{r}.\,(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 2\sqrt{7}$ से किए गए वृत्तीय परिच्छेद की त्रिज्या ज्ञात कीजिए, जहाँ $\mathbf{c} = (-1, 0, 1)$. *3*

(ग) सिद्ध कीजिए कि यदि A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है, तो Adj(A) भी व्युत्क्रमणीय है । *2*

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन *सत्य* हैं ? अपने उत्तरों के कारण बताइए । *5×2=10*

(क) यदि $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$, तब जाति (A) = det (A).

(ख) $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ में एक और केवल एक ऐकिक आव्यूह होता है ।

(ग) यदि U और V, **R** पर सदिश समष्टि W की उपसमष्टियाँ हैं, तब $U \cup V$ भी W की उपसमष्टि है ।

(घ) किसी $\mathbf{R}^4$ से $\mathbf{R}^6$ रैखिक रूपांतरण T के लिए जाति (T) + शून्यता (T) = 6 है ।

(ङ) $\mathbf{R}^2$ के रेखा-समुच्चय पर '$l_1 \, R \, l_2$ यदि और केवल यदि l_1 और l_2 प्रतिच्छेद करते हैं', द्वारा परिभाषित संबंध R, तुल्यता संबंध है ।