

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)****Term-End Examination**

02594

December, 2016**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50**(Weightage : 70%)*

Note : Answer any *five* questions. All computations may be done upto 3 decimal places. Use of calculators is *not* allowed. Symbols have their usual meanings.

1. (a) Find the inverse of the matrix $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

using Gauss-Jordan method.

4

- (b) Divide the polynomial

$$x^5 - 6x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x - 40$$

by $(x - 3)$ by the synthetic division method
and find the remainder.

2

- (c) Determine a unique polynomial $f(x)$ of degree ≤ 3 such that $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = 2$, $f(x_1) = 2$, $f'(x_1) = 3$, where $x_1 - x_0 = h$. 4

2. (a) Obtain the interpolating polynomial in simplest form which fits the following data : 3

x	-1	0	1	2
f(x)	3	-4	5	-6

- (b) Prove that $\mu^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4}$. 2

- (c) Determine the order of convergence of the iterative method

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

for finding a simple root of the equation $f(x) = 0$. 5

3. (a) Solve the initial value problem using Euler method

$$y' = \frac{1}{x^2 - 3y}, \quad y(3) = 2$$

Find $y(3.1)$ taking $h = 0.1$. 2

- (b) Set up the Gauss-Seidel iteration scheme in matrix form for solving the system of equations

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Show that the method is convergent and hence find its rate of convergence.

5

- (c) Write the error in linear interpolation. Hence, show that

$$| \text{error} | \leq \frac{h^2}{8} \max | f''(x) |$$

where $h = x_1 - x_0$, $x \in [x_0, x_1]$.

3

4. (a) Find the number of men getting wages between ₹ 10 and ₹ 15 from the following table :

3

Wages (in ₹)	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40
No. of men	9	30	35	42

- (b) The equation $x^2 + ax + b = 0$ has two real roots p and q such that $|p| < |q|$. If we use the fixed point iteration $x_{k+1} = -\frac{b}{x_k + a}$ to find a root, then to which root does it converge ?

3

- (c) The velocity of a vehicle beginning from rest is given in the following table for part of the first hour. Using Simpson's $\frac{1}{3}$ rule, find the distance travelled by the vehicle in this hour. 4

t = time in minutes	v = velocity km/hr
10	80
20	60
30	70
40	75
50	70
60	80

5. (a) Using Gershgorin bounds, find the estimates of the eigenvalues of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Draw a rough sketch of the bounds. 5

- (b) The following data values for finding approximation to $f''(0.3)$ are given :

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
f(x)	0.091	0.155	0.182	0.171	0.130

Using the central difference formula of $O(h^2)$, find approximations to $f''(0.3)$ with $h = 0.2$ and $h = 0.1$. Hence, find an improved estimate using extrapolation.

5

6. (a) Using the classical fourth order Runge-Kutta method, find the approximate value of $y(0.4)$ for the initial value problem

$$y' = x^2 + xy - 2, \quad y(0) = 0$$

with the step size $h = 0.2$.

6

- (b) Using Newton's divided difference interpolation formula, find $f(x)$ as a polynomial in x using the following table :

4

x	-1	0	3	6	7
f(x)	3	-6	39	822	1611

7. (a) Find the value of α to ensure the fastest possible convergence with the iteration formula

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + x_n^{-2} + 1}{\alpha + 1}. \quad 5$$

- (b) Perform three iterations of the power method to find the largest eigenvalue in magnitude and the corresponding eigenvector of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}. \quad 5$$

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2016

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट : किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी अभिकलन तीन दशमलव स्थानों तक दिए जा सकते हैं । कैल्कुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं ।

1. (क) गाउस-जॉर्डन विधि से आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ का

व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए ।

4

(ख) सांश्लेषिक विभाजन विधि से बहुपद

$$x^5 - 6x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x - 40$$

को $(x - 3)$ से विभाजित कीजिए और अवशेष ज्ञात कीजिए ।

2

- (ग) घात ≤ 3 वाला वह अद्वितीय बहुपद $f(x)$ निर्धारित कीजिए जिसके लिए $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = 2$, $f(x_1) = 2$, $f'(x_1) = 3$, जहाँ $x_1 - x_0 = h$.

4

2. (क) सरलतम रूप में एक ऐसा अंतर्वेशन बहुपद प्राप्त कीजिए जो निम्नलिखित आँकड़ों को आसंजित करता हो :

3

x	-1	0	1	2
f(x)	3	-4	5	-6

- (ख) सिद्ध कीजिए कि $\mu^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4}$.

2

- (ग) समीकरण $f(x) = 0$ का साधारण मूल ज्ञात करने के लिए पुनरावृत्ति विधि

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

की अभिसरण कोटि निर्धारित कीजिए ।

5

3. (क) ऑयलर विधि से आदि मान समस्या को हल कीजिए

$$y' = \frac{1}{x^2 - 3y}, \quad y(3) = 2$$

$h = 0.1$ लेते हुए $y(3.1)$ ज्ञात कीजिए ।

2

- (ख) निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल करने के लिए गाउस-सीडल पुनरावृत्ति विधि को आव्यूह रूप में स्थापित कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

दिखाइए कि पुनरावृत्ति विधि अभिसरित होती है और अतः इसकी अभिसरण दर ज्ञात कीजिए ।

5

- (ग) रैखिक अंतर्वेशन में त्रुटि लिखिए । इस तरह, दिखाइए कि

$$| \text{त्रुटि} | \leq \frac{h^2}{8} \max |f''(x)|$$

जहाँ $h = x_1 - x_0$, $x \in [x_0, x_1]$.

3

4. (क) निम्नलिखित सारणी से ₹ 10 और ₹ 15 के बीच मज़दूरी प्राप्त करने वाले पुरुषों की संख्या ज्ञात कीजिए :

3

मज़दूरी (₹ में)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40
पुरुषों की संख्या	9	30	35	42

- (ख) समीकरण $x^2 + ax + b = 0$ के दो ऐसे वास्तविक मूल p और q हैं जिसके लिए $|p| < |q|$. यदि हम एक मूल ज्ञात करने के लिए नियत बिंदु पुनरावृत्ति $x_{k+1} = -\frac{b}{x_k + a}$ का प्रयोग करते हैं, तो यह किस

मूल की ओर अभिसरित होगी ?

3

- (ग) विश्रामावस्था से आरंभ कर रही एक गाड़ी (वाहन) का वेग पहले घंटे के लिए निम्नलिखित तालिका में दिया गया है। सिम्पसन का $\frac{1}{3}$ नियम लागू करके इस घंटे में गाड़ी (वाहन) द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

4

$t =$ समय मिनट में	$v =$ वेग किमी/घंटे में
10	80
20	60
30	70
40	75
50	70
60	80

5. (क) गर्शगोरिन परिबंधों द्वारा आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ के

आइगेनमान आकलित कीजिए। परिबंधों का रेखांकन मोटे तौर पर कीजिए।

5

(ख) $f''(0.3)$ का सन्निकटन ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित आँकड़ा मान दिए गए हैं :

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
f(x)	0.091	0.155	0.182	0.171	0.130

$O(h^2)$ के केंद्रीय अंतर सूत्र से $h = 0.2$ और $h = 0.1$ के लिए $f''(0.3)$ के सन्निकटन ज्ञात कीजिए । इस तरह, बहिर्वेशन से प्राप्त परिणाम में सुधार कीजिए ।

5

6. (क) चिरप्रतिष्ठित चतुर्थ कोटि रूंगे-कुट्टा विधि द्वारा आदि मान समस्या $y' = x^2 + xy - 2$, $y(0) = 0$ के लिए सोपान आमाप $h = 0.2$ लेकर $y(0.4)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए ।

6

(ख) न्यूटन के विभाजित अंतर अंतर्वेशन सूत्र द्वारा निम्नलिखित सारणी के लिए x के पदों में बहुपद $f(x)$ ज्ञात कीजिए :

4

x	-1	0	3	6	7
f(x)	3	-6	39	822	1611

7. (क) पुनरावृत्ति सूत्र

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + x_n^{-2} + 1}{\alpha + 1}$$

के साथ तीव्रतम संभावित अभिसरण सुनिश्चित करने के लिए α का मान ज्ञात कीजिए ।

5

(ख) घात विधि की तीन पुनरावृत्तियाँ करके आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

का परिमाण में बृहत्तम आइगेनमान और संगत आइगेनसदिश ज्ञात कीजिए ।

5