

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

December, 2016

01164

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-02 : LINEAR ALGEBRA**

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage 70%)

Note : Question no. 7 is **compulsory**. Answer any **four** questions from Questions no. 1 to 6. Use of calculators is **not** allowed.

1. (a) Consider the real vector space $M_n(\mathbb{R})$, of all $n \times n$ matrices with entries from the set of real numbers with respect to the usual addition and scalar multiplication of matrices. Find the smallest subspace of $M_n(\mathbb{R})$ which contains the identity matrix. Also show that the set of all symmetric matrices is a subspace of $M_n(\mathbb{R})$. 5

- (b) Show that the map : $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ given by $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_3, 2x_3 + x_1)$ is a linear transformation. Find its image and the kernel. 5

2. (a) Show that if u_1, u_2, u_3, u_4 are linearly independent vectors in a vector space V over a field K , then $u_1 + u_2, u_3 - u_4, u_4 + u_1$ are also linearly independent. 2
- (b) Show that the matrix $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ is congruent to the identity matrix. 5
- (c) Use the Cayley-Hamilton theorem to find the inverse of the matrix $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. 3
3. (a) Consider the real vector space $A = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}, 2a + 3b = c + d\}$. Find $\dim A$. Also find two distinct subspaces B_1 and B_2 of \mathbf{R}^4 such that $A \oplus B_1 = \mathbf{R}^4 = A \oplus B_2$. 6
- (b) Using the Gram-Schmidt procedure, find an orthonormal basis of \mathbf{C}^3 corresponding to the ordered basis $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (i, 0, 0)\}$. 4
4. (a) Let T be a linear operator whose matrix with respect to the standard basis is given by $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Obtain the matrix of T with respect to the basis $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. 3

- (b) Find the orthogonal canonical form to which the following quadratic form can be reduced. Also obtain a set of principal axes.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 2x_3x_1$$

7

5. (a) Find the eigenvalues and eigenvectors for

the matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Also decide if

A is diagonalisable.

5

- (b) Find the domain of the function f , defined by

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{5-x}}$$

the range of f .

3

- (c) Give an example, with justification, of a binary operation which is not associative.

2

6. (a) Can Cramer's rule be used to solve the following system of equations ? If yes, use the rule to solve it. If not, solve the system using the Gaussian elimination method.

$$2x + 3y + z = 7$$

$$x - 3 = 2y - 2z$$

$$3x - y - 4 + z = 0$$

5

- (b) Prove that $C^4/C \simeq C^3$.

5

7. Which of the following statements are *True* and which are *False* ? Justify your answer with a short proof or by a counter-example. 5×2=10

(a) The operation $*$, defined by $x * y = \log(xy)$ is a binary operation on S , where $S = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$.

(b) If α and β are eigenvalues of two $n \times n$ matrices A and B respectively, then $\alpha + \beta$ is an eigenvalue of $A + B$.

(c) If S and T are linear transformations such that SoT is defined and is $1 - 1$, then S is $1 - 1$.

(d) $T : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R} : T((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (y_1 + y_2 + y_3)$ is an inner product on \mathbf{R}^3 .

(e) $\{\text{India}, -5, \text{Jamila}\}$ is a set.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2016

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-02 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का 70%)

नोट : प्रश्न सं. 7 करना ज़रूरी है। प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (क) आव्यूहों की सामान्य जमा और अदिश गुणन के सापेक्ष वास्तविक संख्याओं के समुच्चय से प्रविष्टियों वाले सभी $n \times n$ आव्यूहों की वास्तविक सदिश समष्टि $M_n(\mathbb{R})$ लीजिए। $M_n(\mathbb{R})$ की ऐसी सबसे छोटी उपसमष्टि ज्ञात कीजिए जिसमें तत्समक आव्यूह हो। यह भी दिखाइए कि सभी सममित आव्यूहों का समुच्चय $M_n(\mathbb{R})$ की उपसमष्टि है।

5

(ख) दिखाइए कि

$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_3, 2x_3 + x_1)$ द्वारा दिया गया प्रतिचित्र : $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ रैखिक रूपांतरण है।

इसका प्रतिबिम्ब और अष्टि ज्ञात कीजिए।

5

2. (क) दिखाइए कि यदि u_1, u_2, u_3, u_4 क्षेत्र K पर सदिश समष्टि V में रैखिकतः स्वतंत्र सदिश हैं, तब $u_1 + u_2, u_3 - u_4, u_4 + u_1$ भी रैखिकतः स्वतंत्र हैं । 2

- (ख) दिखाइए कि आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ तत्समक आव्यूह के सर्वांगसम है । 5

- (ग) आव्यूह $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ का प्रतिलोम ज्ञात करने के लिए कैली-हैमिल्टन प्रमेय का प्रयोग कीजिए । 3

3. (क) वास्तविक सदिश समष्टि $A = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}, 2a + 3b = c + d\}$ लीजिए । $\dim A$ ज्ञात कीजिए । \mathbf{R}^4 की ऐसी दो अलग-अलग उपसमष्टियाँ B_1 और B_2 भी ज्ञात कीजिए जिनके लिए $A \oplus B_1 = \mathbf{R}^4 = A \oplus B_2$. 6

- (ख) ग्राम-शिमिट प्रक्रम का प्रयोग करके क्रमित आधार $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (i, 0, 0)\}$ के संगत \mathbf{C}^3 का प्रसामान्य लांबिक आधार ज्ञात कीजिए । 4

4. (क) मान लीजिए T ऐसा रैखिक संकारक है, जिसका

आव्यूह मानक आधार के सापेक्ष $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ द्वारा

दिया गया है । आधार $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ के

सापेक्ष T का आव्यूह प्राप्त कीजिए । 3

(ख) वह लांबिक विहित समघात ज्ञात कीजिए जिससे निम्नलिखित द्विघाती समघात समानीत हो सकता है । निम्नलिखित मुख्य अक्षों का समुच्चय भी प्राप्त कीजिए :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 2x_3x_1 \quad 7$$

5. (क) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ के आइगेनमान और

आइगेनसदिश ज्ञात कीजिए । यह भी निर्धारित कीजिए कि A विकर्णीय है । 5

(ख) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{5-x}}$ द्वारा परिभाषित फलन f का प्रांत ज्ञात कीजिए । यह भी ज्ञात कीजिए कि क्या 2, f के गोचर (परिसर) में है । 3

(ग) पुष्टि सहित एक ऐसी द्वि-आधारी संक्रिया का उदाहरण दीजिए जो सहचारी नहीं है । 2

6. (क) निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल करने के लिए क्या क्रैमर नियम का प्रयोग किया जा सकता है ? यदि हाँ, तो इसे हल करने के लिए इस नियम का प्रयोग कीजिए । यदि नहीं, तो गाउसीय निराकरण विधि से निकाय को हल कीजिए ।

$$2x + 3y + z = 7$$

$$x - 3 = 2y - 2z$$

$$3x - y - 4 + z = 0 \quad 5$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि $C^4/C \simeq C^3$. 5

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से कथन असत्य ? लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण के साथ अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए ।

5×2=10

- (क) $x * y = \log(xy)$ द्वारा परिभाषित संक्रिया $*$, S पर द्वि-आधारी संक्रिया है, जहाँ $S = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$.
- (ख) यदि α और β दो $n \times n$ आव्यूहों क्रमशः A और B के आइगेनमान हैं, तब $\alpha + \beta$, $A + B$ का आइगेनमान है ।
- (ग) यदि S और T ऐसे रैखिक रूपांतरण हैं जिनके लिए $S \circ T$ परिभाषित है और $1 - 1$ है, तब S , $1 - 1$ होगा ।
- (घ) $T : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R} : T((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (y_1 + y_2 + y_3)$
 \mathbf{R}^3 पर आंतरिक गुणनफल है ।
- (ङ) $\{\text{India}, -5, \text{Jamila}\}$ एक समुच्चय है ।
