

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

December, 2016

00205

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-01 : CALCULUS**

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage 70%)

Note : Question no. 1 is **compulsory**. Attempt any **four** questions from Questions no. 2 to 7. Use of calculators is **not** allowed.

1. State whether the following statements are *True* or *False*. Justify your answers with the help of a short proof or a counter-example.

10

(a)
$$\int_0^{\pi/2} \sin^n \theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta \, d\theta \quad \text{for all}$$

positive integers n .

(b)
$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = 4.$$

- (c) The y-intercept of the function f defined by

$$f(x) = \frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4} \text{ is } \frac{9}{4}.$$

(d)
$$\frac{d}{dx} \int_2^{4x^2} t^{3/2} \cos t \, dt = 4x^4 \cos 4x^2.$$

(e) $\ln(1+x) > x, \forall x > 0.$

2. (a) Find $\frac{dy}{dx}$, if $y = x^{x^{x^{\dots^{\infty}}}}$. 3

(b) Evaluate : 4

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{3+4x-x^2}} \, dx$$

(c) Find the area included between the parabolas $y^2 = 4x$ and $x^2 = 4y$. 3

3. Trace the curve $y^2(1+x^2) = x^2(1-x^2)$ stating all the properties used in the process. 10

4. (a) Find the slope of the normal to the curve $y = x^3$ at $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$. 2

- (b) Find the points of inflexion of the curve
 $y = \frac{a^2 x}{x^2 + a^2}$. Also, show that they lie on a

straight line.

5

- (c) Evaluate :

3

$$\int e^x \cdot \frac{x^2 - x + 1}{(1 + x^2)^{3/2}} dx$$

5. (a) Using Trapezoidal rule, calculate $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ by

dividing the interval $[0, 1]$ in 5 equal subintervals. Hence evaluate π .

4

- (b) Find $\frac{dy}{dx}$, if $y = x^{\sin x} + (\sin x)^x$.

3

- (c) Find the perimeter of the cardioid
 $r = a(1 - \cos \theta)$.

3

6. (a) If the first three non-zero terms of Maclaurin's series for $\sin x$ are used to approximate $\sin \pi/2$, show that the error is less than $1/50$.

4

- (b) Find the least value of $a^2 \sec^2 x + b^2 \operatorname{cosec}^2 x$, where $a > 0, b > 0$.

4

- (c) Evaluate :

2

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$$

7. (a) Verify Rolle's theorem for the function f defined by $f(x) = x^2 - 3x + 2$ on the interval $[1, 2]$. 3

- (b) Find the value of 'a' for which the function f defined by

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{x}; & x < 0 \\ a & ; \quad x = 0 \\ \frac{1 - \cos x}{2 \tan^2 x} & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

is continuous everywhere. 3

- (c) If $u_n = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos nx}{1 - \cos x} dx$, $n \geq 0$, then prove

that $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1}$. Hence evaluate

$$\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos x} dx. \quad 4$$

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2016

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-01 : कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का 70%)

नोट: प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। संक्षिप्त उपपत्ति अथवा प्रत्युदाहरण की सहायता से अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए।

10

(क) सभी धनात्मक पूर्णांक n के लिए,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n \theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta \, d\theta.$$

(ख) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = 4.$

(ग) $f(x) = \frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4}$ द्वारा परिभाषित फलन f का

y -अन्तःखण्ड $\frac{9}{4}$ है।

(घ) $\frac{d}{dx} \int_2^{4x^2} t^{3/2} \cos t \, dt = 4x^4 \cos 4x^2.$

(ङ) $\ln(1+x) > x, \forall x > 0.$

2. (क) यदि $y = x^{x^{\dots^{\infty}}}$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। 3

(ख) मूल्यांकन कीजिए : 4

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{3+4x-x^2}} \, dx$$

(ग) परवलयों $y^2 = 4x$ और $x^2 = 4y$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 3

3. वक्र $y^2(1+x^2) = x^2(1-x^2)$ का अनुरेखण कीजिए।
इसका अनुरेखण करने के लिए आपने जिन गुणों का प्रयोग किया है, उन्हें स्पष्ट रूप से बताइए। 10

4. (क) वक्र $y = x^3$ के बिंदु $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$ पर अभिलंब की प्रवणता ज्ञात कीजिए। 2

(ख) वक्र $y = \frac{a^2 x}{x^2 + a^2}$ के नतिपरिवर्तन बिंदु ज्ञात

कीजिए। यह भी दर्शाइए कि ये बिंदु एक सरल रेखा पर स्थित हैं।

5

(ग) मूल्यांकन कीजिए :

3

$$\int e^x \cdot \frac{x^2 - x + 1}{(1 + x^2)^{3/2}} dx$$

5. (क) अंतराल $[0, 1]$ को 5 बराबर उपअंतरालों में विभाजित करके और समलंबी नियम का प्रयोग करके

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$$
 का परिकलन कीजिए। इस प्रकार π का

मूल्यांकन कीजिए।

4

(ख) यदि $y = x^{\sin x} + (\sin x)^x$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

3

(ग) हृदयाभ $r = a(1 - \cos \theta)$ का परिमाप ज्ञात कीजिए।

3

6. (क) यदि $\sin x$ की मैक्लॉरिन श्रेणी के प्रथम तीन शून्येतर पदों का प्रयोग $\sin \pi/2$ का सन्निकटन करने में किया गया हो, तो दिखाइए कि त्रुटि $1/50$ से कम होती है।

4

(ख) $a^2 \sec^2 x + b^2 \operatorname{cosec}^2 x$, जहाँ $a > 0$, $b > 0$, का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

4

(ग) मूल्यांकन कीजिए :

2

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}$$

7. (क) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ द्वारा परिभाषित फलन f के लिए अन्तराल $[1, 2]$ में रोल प्रमेय की सत्यता की जाँच कीजिए ।

3

- (ख) 'a' का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{x}; & x < 0 \\ a & ; \quad x = 0 \\ \frac{1 - \cos x}{2 \tan^2 x} & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन f के सभी बिंदुओं पर संतत है ।

3

- (ग) यदि $u_n = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos nx}{1 - \cos x} dx$, $n \geq 0$, तो सिद्ध

कीजिए कि $u_{n+2} + u_n = 2 u_{n+1}$. इस प्रकार

$$\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos x} dx \text{ का मूल्यांकन कीजिए ।}$$

4