

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)

Term-End Examination

December, 2015

00864

PHYSICS

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN

PHYSICS-III

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

Note : *All questions are compulsory. The marks for each question are indicated against it. Symbols have their usual meanings.*

1. Attempt any **five** parts : 5×2=10

- (a) Show that the transpose of an orthogonal matrix is its inverse.
- (b) If A^{ij} is an anti-symmetric tensor and B_i is a vector, determine $A^{ij}B_iB_j$.
- (c) Show that $z = 0$ is removable singularity of the function $f(z) = \frac{\sin z^3}{z^2}$.
- (d) Show that each element in an abelian group is a class by itself.

- (e) Obtain the Fourier sine transform of the

$$\text{function } f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- (f) Calculate the Laplace transform of the function $(3 + 3e^{2t})$.

- (g) Obtain $P_1(x)$ using Rodrigues formula.

- (h) Using Cauchy integral formula, evaluate the

$$\oint_C \frac{\exp(z)}{z^3} dz \quad \text{over the closed}$$

contour C formed by the lines $x = \pm 1$ and $y = \pm 1$.

2. Attempt any *two* parts :

- (a) Determine the eigenvalues and eigenvectors of the matrix

5

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) (i) T_{ikl} is anti-symmetric with respect to all pairs of indices. Express this statement mathematically.

2

- (ii) Show that $\{1, -1\}$ is a subgroup of the multiplicative group $\{1, i, -1, -i\}$.

3

- (c) Show that every eigenvalue of a unitary matrix is of unit modulus.

5

3. Attempt any **two** parts :

2×5=10

- (a) Obtain Laurent series expansion of the function

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 3}$$

in the region $0 < |z - 1| < 2$.

- (b) Evaluate the integral $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$.

- (c) Prove that $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

4. Attempt any **two** parts :

2×5=10

- (a) Obtain the Fourier cosine transform of the function

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} & 0 < x < 2 \\ 0 & x > 2. \end{cases}$$

- (b) Obtain the inverse Laplace transform of the function

$$F(s) = \frac{2s}{(s^2 - 4)^2}$$

- (c) Use the Laplace transform to solve the initial value problem

$$y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.$$

5. Attempt any **one** part :

- (a) Using the recurrence relation

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

evaluate the integral

$$\int_{-1}^{+1} x P_{n-1}(x) P_n(x) dx. \quad 10$$

- (b) Using the generating function

$$g(x, t) = \frac{\exp(-xt/(1-t))}{1-t}, \quad |t| < 1$$

for Laguerre polynomials, establish the following recurrence relation : 10

$$mL_m(x) = (2m-1-x)L_{m-1}(x) - (m-1)L_m(x)$$

विज्ञान स्नातक (बी.एस सी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2015

भौतिक विज्ञान

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-III

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं। प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

1. कोई पाँच भाग हल कीजिए :

5×2=10

(क) सिद्ध कीजिए कि लांबिक आव्यूह का परिवर्त इसका व्युत्क्रम होता है।

(ख) यदि A^{ij} एक प्रति-सममित टेन्सर हो और B_i एक सदिश हो, तो $A^{ij}B_iB_j$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ग) सिद्ध कीजिए कि $z = 0$ फलन $f(z) = \frac{\sin z^3}{z^2}$ की अपनेय विचित्रता है।

(घ) सिद्ध कीजिए कि एक आबेली समूह का प्रत्येक अवयव स्वयं में एक वर्ग है।

$$(ड) \text{ फलन } f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

का फूरिये साइन (ज्या) रूपांतर निकालिए ।

(च) फलन $(3 + 3e^{2t})$ का लाप्लास रूपांतर परिकलित कीजिए ।

(छ) रोड्रिगेज़ सूत्र का प्रयोग कर $P_1(x)$ निकालिए ।

(ज) कौशी समाकल सूत्र का प्रयोग करते हुए, समाकल

$$\oint_C \frac{\exp(z)}{z^3} dz \text{ को रेखाओं } x = \pm 1 \text{ तथा } y = \pm 1 \text{ से}$$

बने संवृत कंटूर C पर परिकलित कीजिए ।

2. कोई दो भाग हल कीजिए :

(क) निम्न आव्यूह के आइगेनमान और आइगेनसदिश ज्ञात कीजिए :

5

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(ख) (i) T_{ikl} सभी सूचकांक युग्मों के सापेक्ष प्रति-सममित है । इस कथन को गणितीय भाषा में व्यक्त कीजिए ।

2

(ii) सिद्ध कीजिए कि $\{1, -1\}$ गुणनात्मक समूह $\{1, i, -1, -i\}$ का एक उपसमूह है ।

3

(ग) सिद्ध कीजिए कि ऐकिक आव्यूह का प्रत्येक आइगेनमान एकक मापांक वाला होता है ।

5

3. कोई दो भाग हल कीजिए :

2×5=10

(क) $0 < |z - 1| < 2$ क्षेत्र में फलन $f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 3}$

का लौराँ श्रेणी प्रसार प्राप्त कीजिए ।

(ख) समाकल $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$ परिकलित कीजिए ।

(ग) सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

4. कोई दो भाग हल कीजिए :

2×5=10

(क) फलन $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} & 0 < x < 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$

का फूरिये कोसाइन (कोज्या) रूपांतर प्राप्त कीजिए ।

(ख) फलन $F(s) = \frac{2s}{(s^2 - 4)^2}$

का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर प्राप्त कीजिए ।

(ग) लाप्लास रूपांतर का प्रयोग करके आदि मान समस्या

$$y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$$

को हल कीजिए ।

5. कोई एक भाग हल कीजिए :

(क) पुनरावृत्ति सम्बन्ध

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

का प्रयोग कर $\int_{-1}^{+1} x P_{n-1}(x) P_n(x) dx$ समाकल

परिकलित कीजिए ।

10

(ख) जनक फलन

$$g(x, t) = \frac{\exp(-xt/(1-t))}{1-t}, \quad |t| < 1$$

का प्रयोग करते हुए लागेर बहुपदों के लिए, निम्न पुनरावृत्ति सम्बन्ध को स्थापित कीजिए :

10

$$mL_m(x) = (2m-1-x)L_{m-1}(x) - (m-1)L_{m+1}(x)$$