00242

No. of Printed Pages : 16

MTE-14

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2015

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*
(Weightage : 70%)

Note : *Attempt any **five** questions. All questions carry equal marks. Use of calculators is **not** allowed.*

---

1. (a) A body is falling free in a vacuum. The fall is necessarily related to the gravitational acceleration g and the height h from which the body is dropped. Use dimensional analysis to show that the velocity V of the falling body satisfies the relation $V/\sqrt{gh}$ = constant. *3*

(b) Consider the blood flow in an artery following Poiseuille's law. If the length of the artery is 3 cm, radius is 7×10^{-3} cm and driving force is 5×10^{3} dynes/cm^2, then using blood viscosity, $\mu = 0{\cdot}027$ poise, find the

(i) velocity u(y) and the maximum peak velocity of blood, and

(ii) shear stress at the wall of the artery. *4*

(c) Find the equilibrium price in a perfectly competitive market with the supply function $S(p) = (-p^2 + 4)/3$ and the demand function $D(p) = -p + 2$. Using the static criterion of Walras, determine whether the price is stable or not. *3*

2. (a) Write the three-dimensional Gaussian model of dispersion for the atmospheric pollution problem. Modify the model under the following assumptions : *4*

(i) Wind velocity is in only y-direction.

(ii) Mass transfer due to bulk motion in the y-direction overshadows the contributions due to mass diffusion.

(iii) Motion is in steady state.

(iv) Wind speed is constant.

(v) Diffusivities are constant in all the directions.

(b) The sales of a small factory since 2008 are as follows :

Year	Sales (in ₹ lakhs)
2008	8
2009	10
2010	9
2011	11
2012	11
2013	12

Using 2008 as the zero year, find the least-square trend-line equation. *4*

(c) Write the limitations of the Malthusian model of population growth. *2*

3. (a) A park has a stable population of birds. Prior to this situation, the birds' population increased from an initial low level. When the population of birds was 1,000, the proportionate birth rate was 40% per year and the proportionate death rate was 5% per year. When the population was 3,000, the proportionate birth rate was 30% and the proportionate death rate was 10%. Consider the population model under the following assumptions :

(i) There is no migration and no exploitation.

(ii) The proportionate birth rate is a decreasing linear function of the population.

(iii) The proportionate death rate is an increasing linear function of the population.

Show that

(1) the population grows according to the logistic model.

(2) Find the stable population size.

(3) If the shooting of birds is allowed at the rate of 15% of the population per year, find the new equilibrium population. 7

(b) A particle is executing Simple Harmonic Motion of amplitude 6 m and period 3·5 seconds. Find the maximum velocity of the particle. 3

4. (a) Consider the pay-off table for two players as given below :

$$\begin{array}{cc} & \text{Player B} \\ & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{Player A} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} -4 & -2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 6 & -3 & -5 \end{bmatrix} \end{array}$$

(i) Find the saddle point and the value of the game.

(ii) Give two equivalent linear programming problems for the above problem. *6*

(b) In a population of lions, the proportionate death rate is 0·55 per year and the proportionate birth rate is 0·45 per year. Formulate a model of the population. Solve the model and discuss its long term behaviour. Also find the equilibrium point of the model. *4*

5. (a) Consider the upward motion of a particle under gravity with a velocity of projection u_0 and resistance mkv^2. Show that the velocity V at time t and distance x from the point of projection are related as

$$\frac{2gx}{V_t^2} = ln\left(\frac{u_0^2 + V_t^2}{V^2 + V_t^2}\right), \text{ where } k = \frac{g}{V_t^2}.$$ *3*

(b) A short-run cost function for an entrepreneur is $q^3 - 8q^2 + 30q + 60$. Determine the price at which the entrepreneur ceases production in an ideal market. Also derive the supply function. *4*

(c) Give one example each from the real world for the following, along with justification, for your example : *3*

(i) A non-linear model

(ii) A stochastic model

(iii) A linear, deterministic model

6. (a) The mean arrival rate to a service centre is 3 per hour. The mean service time is found to be 10 minutes for service. Assuming Poisson arrival and exponential service time, find

(i) the utilisation factor for this service facility,

(ii) the probability of two units in the system,

(iii) the expected number of units in the system, and

(iv) the expected time in hours that a customer has to spend in the system. *5*

(b) A model corresponding to the cooperative interaction between two species x and y is given by

$$\frac{dx}{dt} = (4 - 2x + y)\,x$$

$$\frac{dy}{dt} = (4 + x - 2y)\,y.$$

Find all the equilibrium points of the system and discuss the stability of the system at these points. *5*

7. (a) The differential equations

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \lambda S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

model a disease spread by contact, where S is the number of susceptibles, I is the number of infectives, β is the contact rate, γ is the removal rate and λ is the birth rate of susceptibles.

(i) Identify which term in the RHS of each differential equation arises from the birth of susceptibles.

(ii) Discuss the model given by the above two differential equations. *6*

(b) Suppose the quarterly sales for a particular make of a car in Delhi were 2682, 2462 and 3012, respectively. From the past data prior to these three data points, a straight line was the fit. The value on the line corresponding to the last observed time is 2988 and the slope is 80. Use exponential smoothing based upon the three observations given above to forecast sales for the quarterly period following these observations, using $\alpha = \beta = 0{\cdot}2$. *4*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2015

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-14 : गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

---

1. (क) एक पिंड निर्वात में मुक्त रूप से गिर रहा है । गिरना अनिवार्यत: गुरुत्वीय त्वरण g और ऊँचाई h, जहाँ से पिंड को गिराया जाता है, से सम्बन्धित है । विमीय विश्लेषण का प्रयोग करके, दिखाइए कि गिरते हुए पिंड का वेग V सम्बन्ध $V/\sqrt{gh}$ = अचर, को संतुष्ट करता है । *3*

(ख) प्वाज़य नियम का अनुसरण करने वाली धमनी में रक्त-प्रवाह लीजिए । यदि धमनी की लंबाई 3 सेमी हो, त्रिज्या 7×10^{-3} सेमी हो और चालक बल 5×10^{3} dynes/cm^2 हो, तब रक्त श्यानता $\mu = 0{\cdot}027$ प्वाज का प्रयोग करते हुए ज्ञात कीजिए

(i) वेग u(y) और रक्त का अधिकतम शिखर वेग, तथा

(ii) धमनी की दीवार पर अपरूपण-प्रतिबल । *4*

(ग) पूर्ति फलन $S(p) = (-p^2 + 4)/3$ और माँग फलन $D(p) = -p + 2$ वाले एक पूर्णत: प्रतियोगी बाज़ार की संतुलन कीमत ज्ञात कीजिए । वाल्रास का स्थैतिक निकष लागू करके बताइए कि कीमत स्थायी है या नहीं । *3*

2. (क) वायुमंडलीय प्रदूषण समस्या के लिए त्रि-विमीय गाउसीय परिक्षेपण निदर्श लिखिए । निम्नलिखित कल्पनाओं के अधीन निदर्श परिवर्तन कीजिए : *4*

(i) पवन वेग केवल y-दिशा में होता है ।

(ii) y-दिशा में समष्टि गति से होने वाले द्रव्यमान के स्थानांतरण के मुकाबले द्रव्यमान विसरण का स्थानांतरण इतना कम होता है कि हम इसे शून्य के बराबर मान लेते हैं ।

(iii) गति स्थायी अवस्था में है ।

(iv) पवन चाल अचर है ।

(v) सभी दिशाओं में विसरणशीलताएँ अचर हैं ।

(ख) 2008 से एक छोटी फैक्टरी की बिक्रियाँ इस प्रकार हैं :

वर्ष	बिक्रियाँ (लाख ₹ में)
2008	8
2009	10
2010	9
2011	11
2012	11
2013	12

2008 को शून्य वर्ष मानकर, न्यूनतम-वर्ग उपनति-रेखा समीकरण ज्ञात कीजिए । *4*

(ग) माल्थस के जनसंख्या संवृद्धि निदर्श की परिसीमाएँ लिखिए । *2*

3. (क) एक उद्यान में पक्षियों की समष्टि स्थायी है । इस स्थिति से पहले, पक्षियों की समष्टि में प्रारंभिकत: निम्न स्तर से वृद्धि हुई । जब पक्षियों की समष्टि 1,000 थी, तो आनुपातिक जन्म दर 40% प्रति वर्ष थी और आनुपातिक मृत्यु दर 5% प्रति वर्ष थी । जब समष्टि 3,000 थी, तब आनुपातिक जन्म दर 30% और आनुपातिक मृत्यु दर 10% थी । निम्नलिखित कल्पनाओं के आधार पर समष्टि निदर्श लीजिए :

(i) न तो प्रवसन हुआ है और न ही शिकार ।

(ii) आनुपातिक जन्म दर समष्टि का एक ह्रासमान रैखिक फलन है ।

(iii) आनुपातिक मृत्यु दर समष्टि का एक वर्धमान रैखिक फलन है ।

दिखाइए कि

(1) समष्टि में वृद्धिघात निदर्श के अनुसार वृद्धि होती है ।

(2) स्थायी समष्टि का आमाप ज्ञात कीजिए ।

(3) यदि समष्टि में 15% प्रति वर्ष की दर से पक्षियों का शिकार करने की अनुमति हो, तो नई साम्य समष्टि ज्ञात कीजिए । 7

(ख) एक कण आमाप 6 मी. और अवधि 3·5 सेकण्ड से सरल आवर्त गति कर रहा है । कण का अधिकतम वेग ज्ञात कीजिए । 3

4. (क) दो खिलाड़ियों की भुगतान सारणी नीचे दी गई है :

$$\begin{array}{cc} & \text{खिलाड़ी B} \\ & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{खिलाड़ी A} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} -4 & -2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 6 & -3 & -5 \end{bmatrix} \end{array}$$

(i) खेल का पल्याण बिन्दु और मान ज्ञात कीजिए ।

(ii) उपर्युक्त समस्या की दो तुल्य रैखिक प्रोग्रामन समस्याएँ दीजिए । *6*

(ख) शेरों की समष्टि में, आनुपातिक मृत्यु दर 0·55 प्रति वर्ष है और आनुपातिक जन्म दर 0·45 प्रति वर्ष है । समष्टि का निदर्श सूत्रित कीजिए । निदर्श को हल कीजिए और इसके दीर्घकालिक व्यवहार की चर्चा कीजिए । निदर्श का संतुलन बिन्दु भी ज्ञात कीजिए । *4*

5. (क) प्रक्षेप वेग u_0 और प्रतिरोध mkv^2 वाले गुरुत्वाधीन उपरिमुखी गति का एक कण लीजिए । दिखाइए कि प्रक्षेप के बिन्दु से दूरी x और समय t पर वेग V निम्नलिखित अनुसार संबंधित है :

$$\frac{2gx}{V_t^2} = ln\left(\frac{u_0^2 + V_t^2}{V^2 + V_t^2}\right), \text{ जहाँ } k = \frac{g}{V_t^2}.$$ *3*

(ख) एक उद्यमकर्ता के लिए अल्पकालिक लागत फलन $q^3 - 8q^2 + 30q + 60$ है । वह कीमत ज्ञात कीजिए जिस पर उद्यमकर्ता एक आदर्श बाज़ार में उत्पादन रोक सकता है । पूर्ति फलन भी व्युत्पन्न कीजिए । *4*

(ग) वास्तविक जीवन से निम्नलिखित प्रत्येक का एक उदाहरण पुष्टि सहित दीजिए : *3*

(i) अरैखिक निदर्श

(ii) प्रसंभाव्य निदर्श

(iii) रैखिक, निर्धारणात्मक निदर्श

6. (क) एक सर्विस सेंटर में माध्य आगमन दर 3 प्रति घंटा है । सर्विस के लिए माध्य सेवा काल 10 मिनट प्रति सेवा पाया गया । प्वासों आगमन और चरघातांकी सेवा काल मानकर निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

(i) इस सेवा सुविधा के लिए उपयोगिता कारक,

(ii) प्रणाली में दो इकाइयों की प्रायिकता,

(iii) प्रणाली में इकाइयों की प्रत्याशित संख्या, तथा

(iv) प्रणाली में उपभोक्ता द्वारा घंटों में बिताया जाने वाला प्रत्याशित समय । *5*

(ख) दो स्पीशीज़ x और y के बीच सहकारी अन्योन्यक्रिया का संगत निदर्श नीचे दिया गया है :

$$\frac{dx}{dt} = (4 - 2x + y)\,x$$

$$\frac{dy}{dt} = (4 + x - 2y)\,y.$$

निकाय के सभी साम्य बिन्दु ज्ञात कीजिए और इन बिन्दुओं पर निकाय के स्थायित्व की चर्चा कीजिए । *5*

7. (क) अवकल समीकरण

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \lambda S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

संपर्क से फैलने वाली बीमारी का निदर्शन करते हैं, जहाँ S सुग्राह्यों की संख्या है, I संक्रामकों की संख्या है, β संपर्क दर है, γ निष्कासन दर है और λ सुग्राह्यों की जन्म दर है ।

(i) पता लगाइए कि दोनों अवकल समीकरणों के दाएँ पक्ष में कौन-से पद सुग्राह्यों के जन्म के कारण प्राप्त होते हैं ।

(ii) उपर्युक्त दोनों अवकल समीकरणों द्वारा प्राप्त निदर्श पर चर्चा कीजिए । *6*

(ख) मान लीजिए दिल्ली में एक कार की तिमाही बिक्री क्रमश: 2682, 2462 और 3012 है । पिछले आँकड़ों (इन तीन आँकड़ों बिन्दुओं से पहले) से एक सरल रेखा आसंजित की गई थी । रेखा पर अंतिम प्रेक्षित समय का संगत मान 2988 है और प्रवणता 80 है । $\alpha = \beta = 0{\cdot}2$ मानकर ऊपर दिए गए तीन प्रेक्षणों के बाद की तिमाही अवधि में होने वाली बिक्री का पूर्वानुमान लगाने के लिए ऊपर दिए गए तीन प्रेक्षणों पर आधारित चरघातांकी मसृणीकरण का प्रयोग कीजिए । *4*