

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

December, 2015

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-13 : DISCRETE MATHEMATICS**

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage : 70%)

Note : Question no. 1 is **compulsory**. Answer any **four** questions from questions no. 2 to 7. Use of calculators is **not** allowed.

1. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer. $5 \times 2 = 10$
 - (a) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
 - (b) There exists a simple graph with degree sequence 7, 7, 7, 5, 5, 3, 3.
 - (c) $a_n = a_{n/2} + n$, $a_1 = 0$, where n is a power of 2, is a linear recurrence relation.
 - (d) The partition $4 + 3 + 3 + 1$ is self-conjugate.
 - (e) The graph $K_{4,5}$ is Eulerian.
2. (a) Express x^5 in terms of falling factorials and hence evaluate S_5^m for $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. 5

- (b) Prove that every tree is bipartite. Is the converse true? Justify. 3
- (c) How many five digit numbers are composed of only even digits? 2
3. (a) Form the truth tables of $(p \vee q) \wedge \sim r$ and $p \vee (q \wedge \sim r)$ to verify whether $(p \vee q) \wedge \sim r \equiv p \vee (q \wedge \sim r)$. 3
- (b) Using mathematical induction, prove that $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \forall n \in \mathbf{N}$. 3
- (c) Find the solution of the recurrence relation $a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}, a_0 = 0, a_1 = 6$. 4
4. (a) Solve the following recurrence relation : $u_n = (n! \cdot n) u_{n-1}$ for $n \geq 1$ with $u_0 = 1$. 3
- (b) Let \mathfrak{B} be a two element Boolean algebra with \wedge, \vee and $'$ operations defined in it. Prove that $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$ is also a Boolean algebra stating clearly the operations defined in it. 5
- (c) Determine if the following is a valid argument. Explain your conclusion. 2

Proposition : $\forall x \in \mathbf{R}, x^3 > x^2$

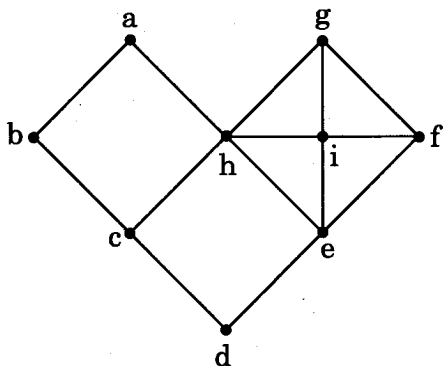
Proof : $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 > 0$

$$\Rightarrow x^2(x-1) > 0 \quad (x-1)$$

$$\Rightarrow x^3 - x^2 > 0$$

$$\Rightarrow x^3 > x^2.$$

5. (a) Find a recurrence relation for a_n , the number of ways to arrange cars in a row with n spaces if we can use Maruti 800 or Tata Safari or Scorpio. A Tata Safari or Scorpio requires two spaces, whereas a Maruti 800 requires just one space. Assume that you have unlimited number of each type of car and we do not distinguish between 2 cars of the same type. 4
- (b) If $K_{m,n}$ for $m, n \geq 2$, is Hamiltonian, how are m and n related? Justify your answer. 3
- (c) Show that if 7 colours are used to paint 50 bicycles and each cycle is coloured with a single colour, at least 8 bicycles will have the same colour. 3
6. (a) A box contains 6 red and 4 green balls. Four balls are selected from the box at random. What is the probability that two of the selected balls will be red and two will be green? 3
- (b) Define vertex connectivity and cut vertex set of any graph G . Find the vertex connectivity and cut vertex set for the following graph : 4



- (c) How many numbers from 0 to 759 are not divisible by either 3 or 7 ? 3

7. (a) Solve the following recurrence relation :
 $a_n = 2a_{n-1} + 1$ if $n \geq 1$ and $a_0 = 0$, using generating function technique. Also find a_5 using your answer. 5

- (b) Is there a 4-regular graph on 7 vertices ? If 'yes', construct such a graph. If your answer is 'no', justify your answer. 2

- (c) Find the Boolean expression in the DNF form for the function defined in tabular form below : 3

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
1	1	0	1
0	0	0	0

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2015

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-13 : विविक्त गणित

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट: प्रश्न सं. 1 करना अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से कोई चार प्रश्न कीजिए। कैल्कुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

- निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5×2=10
 - $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
 - कोटि अनुक्रम 7, 7, 7, 5, 5, 3, 3 वाले सरल ग्राफ का अस्तित्व होता है।
 - $a_n = a_{n/2} + n$, $a_1 = 0$, जहाँ n , 2 की घात है, एक रैखिक पुनरावृत्ति सम्बन्ध है।
 - विभाजन $4 + 3 + 3 + 1$ स्वसंयुग्मी है।
 - ग्राफ $K_{4,5}$ ऑयलरी है।
- x^5 को पतती क्रमगुणित के पदों में व्यक्त कीजिए और इस तरह $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ के लिए S_5^m का मूल्यांकन कीजिए।

5

(ख) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक वृक्ष द्विभाजित है। क्या यह विलोम सत्य है? पुष्टि कीजिए। 3

(ग) पाँच अंक की कितनी संख्याएँ केवल सम अंकों से बनती हैं? 2

3. (क) $(p \vee q) \wedge \sim r \equiv p \vee (q \wedge \sim r)$ है या नहीं इसको सत्यापित करने के लिए $(p \vee q) \wedge \sim r$ और $p \vee (q \wedge \sim r)$ की सत्यमान सारणियाँ बनाइए। 3

(ख) गणितीय आगमन द्वारा सिद्ध कीजिए कि

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$
 3

(ग) पुनरावृत्ति सम्बन्ध
 $a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}, a_0 = 0, a_1 = 6$
 का हल ज्ञात कीजिए। 4

4. (क) निम्नलिखित पुनरावृत्ति सम्बन्ध को हल कीजिए :
 $u_0 = 1$ वाले $n \geq 1$ के लिए $u_n = (n! \cdot n) u_{n-1}$ 3

(ख) मान लीजिए \otimes दो अवयव बूलीय बीजावली है जिसमें संक्रियाएँ \wedge, \vee और $'$ परिभाषित हैं। $\otimes \times \otimes$ पर परिभाषित संक्रियाओं को स्पष्ट करते हुए सिद्ध कीजिए कि $\otimes \times \otimes$ भी एक बूलीय बीजावली है। 5

(ग) निर्धारित कीजिए कि क्या निम्नलिखित तर्क मान्य है। अपने निष्कर्ष को स्पष्ट कीजिए। 2

$$\text{कथन : } \forall x \in \mathbf{R}, x^3 > x^2$$

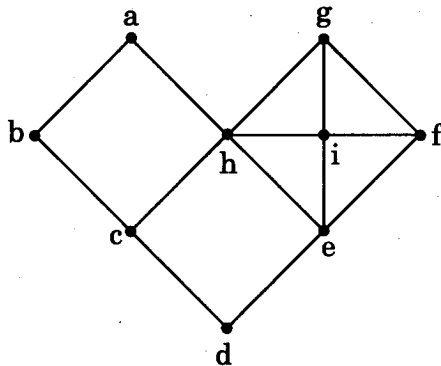
$$\text{उपपत्ति : } \forall x \in \mathbf{R}, x^2 > 0$$

$$\Rightarrow x^2(x-1) > 0(x-1)$$

$$\Rightarrow x^3 - x^2 > 0$$

$$\Rightarrow x^3 > x^2.$$

5. (क) यदि हम मारुति 800 या टाटा सफारी या स्कोरपियो का प्रयोग कर सकते हैं तब n स्थानों वाली पंक्ति में कारों को रखने की संख्या a_n के लिए पुनरावृत्ति सम्बन्ध ज्ञात कीजिए । एक टाटा सफारी या स्कोरपियो को दो स्थानों की आवश्यकता होगी, जबकि मारुति 800 को केवल एक स्थान की ज़रूरत होगी । मान लीजिए कि आपके पास प्रत्येक कारों की संख्या असीमित है और प्रत्येक प्रकार की 2 कारों के बीच हम अन्तर नहीं करते हैं । 4
- (ख) यदि $m, n \geq 2$ के लिए $K_{m,n}$ हैमिल्टोनियन है, तब m और n किस प्रकार सम्बन्धित हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 3
- (ग) दिखाइए कि यदि 50 साइकिलों को पेंट करने के लिए 7 रंगों का प्रयोग किया जाता है और प्रत्येक साइकिल को एक ही रंग से पेंट किया जाता है, तब कम-से-कम 8 साइकिलों का रंग एक जैसा होगा । 3
6. (क) एक बक्से में 6 लाल और 4 हरी गेंदें हैं । बक्से में से चार गेंदें यादृच्छया चुनी जाती हैं । चुनी गई गेंदों में से दो लाल और दो हरी होंगी, इसकी क्या प्रायिकता है ? 3
- (ख) किसी भी ग्राफ G के शीर्ष सम्बद्धतांक और काट शीर्ष समुच्चय को परिभाषित कीजिए । निम्नलिखित ग्राफ का शीर्ष सम्बद्धतांक और काट शीर्ष समुच्चय ज्ञात कीजिए : 4



(ग) 0 से 759 तक की कितनी संख्याएँ 3 या 7 से विभाजित नहीं होतीं ?

3

7. (क) जनक फलन तकनीक का प्रयोग करके निम्नलिखित पुनरावृत्ति सम्बन्ध को हल कीजिए :

$a_n = 2a_{n-1} + 1$ यदि $n \geq 1$ और $a_0 = 0$. अपने उत्तर से a_5 भी ज्ञात कीजिए ।

5

(ख) क्या 7 शीर्षों पर 4-नियमित ग्राफ़ होता है ? यदि 'होता है' तो ऐसा ग्राफ़ बनाइए । यदि 'नहीं होता है' तो अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए ।

2

(ग) नीचे सारणीबद्ध रूप में परिभाषित फलन के लिए DNF रूप में बूलीय व्यंजक ज्ञात कीजिए :

3

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
1	1	0	1
0	0	0	0