No. of Printed Pages : 12

MTE-12

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

01812

December, 2015

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-12 : LINEAR PROGRAMMING

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. **1** is **compulsory**. Attempt any **four** questions out of questions no. **2** to **7**. Use of calculators is **not** allowed.*

---

1. Which of the following statements are true and which are false ? Give a short proof or a counter-example in support of your answer. *10*

(a) An unbalanced transportation model requires the addition of both a dummy source and a dummy destination to effect balancing.

(b) If the coefficients of the objective function of a LPP are changed, then optimal values of the variables are also changed.

(c) The dual of the dual is the primal.

(d) In a LPP, degeneracy can be avoided if redundant constraints are deleted.

(e) In a two-person zero-sum game, if the optimal solution requires one player to use a mixed strategy, the other player must do the same.

2. (a) Solve the following linear programming problem by graphical method : *6*

Maximize $z = 3x_1 + 2x_2$

subject to $x_1 - x_2 \geq 1$

$x_1 + x_2 \geq 3$

$x_1, x_2 \geq 0.$

(b) Solve the following assignment problem : *4*

	I	II	III	IV
A	2	3	4	5
B	4	5	6	7
C	7	8	9	8
D	3	5	8	4

3. (a) A manufacturer has two products P_1 and P_2, both of which are produced in two steps by machines M_1 and M_2. The process time per hundred for the products on the machines are :

	M_1	M_2	Profit (per 100 units)
P_1	4	5	10
P_2	5	2	5
Available hours	100	80	

The manufacturer can sell as much as he can produce of both products. Formulate the problem as LP model. Determine optimum solution, using simplex method. *6*

(b) Using graphical method, solve the game whose pay-off matrix is given as : *4*

		B			
		I	II	III	IV
A	I	1	3	– 3	7
	II	2	5	4	– 6

4. (a) Find the dual of the following LPP : *4*

Maximize $z = 3x_1 - 2x_2$

subject to $x_1 \leq 4$

$2x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1 + x_2 \leq 5$

$3x_1 - x_2 = -1$

$x_2 \geq 0$, x_1 is unrestricted.

(b) Transform the following zero-sum game into an equivalent linear programming problem : *6*

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	– 1	3
A_2	3	5	– 3
A_3	6	2	– 2

5. (a) A manufacturer of medicines is setting-up a production plant for medicines A and B. There are sufficient ingredients available to make 20,000 bottles of A and 40,000 bottles of B but there are only 45,000 bottles into which either of the medicines can be put. It takes 3 hours to prepare enough material to fill 1000 bottles of A. It takes 1 hour to prepare enough material to fill 1000 bottles of B. There are 66 hours available for this operation. The profit is ₹ 8 per bottle for A and ₹ 7 per bottle for B. Formulate this problem as a linear programming problem. *4*

(b) Find the initial basic feasible solution of the following transportation problem using North-West corner method :

	P_1	P_2	P_3	P_4	Requirement
M_1	19	11	23	11	11
M_2	15	16	12	21	13
M_3	30	25	16	39	19
Availability	6	10	12	15	113

Also, find the optimal solution. *6*

6. (a) Show that the set

$$S = \{(x, y) \mid 3x^2 + 5y^2 \leq 15\}$$

is convex. *4*

(b) Show that the set of vectors $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ and $\mathbf{a}_3$ forms a basis for E^3 : *3*

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(c) Consider the system of equations

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 11$$

$$3x_1 + x_2 + 5x_3 = 14$$

A feasible solution is $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$. Reduce this feasible solution to a basic feasible solution. *3*

7. (a) Solve the game whose pay-off matrix is *5*

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 8 \\ 7 & 5 & -1 \\ 6 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

(b) 5 jobs are to be assigned on 5 available machines. The following matrix shows the profit obtained (in ₹) on assigning various jobs to different machines :

$$\begin{array}{c} \\ J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 11 & 10 & 12 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 12 & 5 & 14 & 6 \\ 6 & 14 & 4 & 11 & 7 \\ 7 & 9 & 8 & 12 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Determine an assignment which maximizes the total profit. *5*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2015

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-12 : रैखिक प्रोग्रामन

समय : 2 घण्टे | *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *प्रश्न सं. 1 करना **अनिवार्य** है । प्रश्न सं. 2 से 7 में से कोई **चार** प्रश्न कीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य ? अपने उत्तर के पक्ष में संक्षिप्त उपपत्ति या प्रत्युदाहरण दीजिए । *10*

   (क) एक असंतुलित परिवहन निदर्श को संतुलित बनाने के लिए एक कृत्रिम स्रोत और एक कृत्रिम गंतव्य दोनों जोड़े जाते हैं ।

   (ख) यदि एक LPP के उद्देश्य फलन के गुणांकों को बदला जाता है, तो चरों के इष्टतम मान भी बदल जाते हैं ।

   (ग) द्वैती की द्वैती आद्य होती है ।

(घ) एक LPP में, यदि अनावश्यक व्यवरोधों को हटा दें तो अपभ्रष्टता से बचा जा सकता है ।

(ङ) एक द्वि-व्यक्ति शून्य-योग खेल में, इष्टतम हल के लिए यदि एक खिलाड़ी मिश्रित युक्तियों का प्रयोग करता है, तो दूसरे खिलाड़ी को भी वही करना चाहिए ।

2. (क) निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को ग्राफीय विधि द्वारा हल कीजिए : *6*

$z = 3x_1 + 2x_2$ का अधिकतमीकरण कीजिए

जबकि $x_1 - x_2 \geq 1$

$x_1 + x_2 \geq 3$

$x_1, x_2 \geq 0.$

(ख) निम्नलिखित नियतन समस्या को हल कीजिए : *4*

	I	II	III	IV
A	2	3	4	5
B	4	5	6	7
C	7	8	9	8
D	3	5	8	4

3. (क) एक निर्माता दो उत्पाद P_1 और P_2 रखता है, ये दोनों ही उत्पाद मशीनों M_1 और M_2 द्वारा दो चरणों में बनाए जाते हैं । मशीनों पर उत्पादों के बनाने का समय प्रति सैकड़ा निम्नलिखित तालिका में दिया गया है :

	M_1	M_2	लाभ (प्रति 100 इकाई)
P_1	4	5	10
P_2	5	2	5
उपलब्ध घंटे	100	80	

निर्माता दोनों उत्पाद जितने बनाता है उतने ही बेच सकता है । इस समस्या को LP निदर्श के रूप में सूत्रित कीजिए । एकधा विधि द्वारा इष्टतम हल भी ज्ञात कीजिए । *6*

(ख) ग्राफीय विधि द्वारा, निम्नलिखित भुगतान आव्यूह खेल को हल कीजिए : *4*

$$\begin{array}{cc|cccc} & & & B & & \\ & & I & II & III & IV \\ \hline A & I & 1 & 3 & -3 & 7 \\ & II & 2 & 5 & 4 & -6 \end{array}$$

4. (क) निम्नलिखित LPP की द्वैती ज्ञात कीजिए : *4*

$z = 3x_1 - 2x_2$ का अधिकतमीकरण कीजिए

जबकि $x_1 \leq 4$

$2x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1 + x_2 \leq 5$

$3x_1 - x_2 = -1$

$x_2 \geq 0$, x_1 अप्रतिबंधित है ।

(ख) निम्नलिखित शून्य-योग खेल को एक समतुल्य रैखिक प्रोग्रामन समस्या में परिवर्तित कीजिए : *6*

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	– 1	3
A_2	3	5	– 3
A_3	6	2	– 2

5. (क) दवाइयों का एक निर्माता दवाइयों A और B के लिए उत्पादन संयंत्र लगाने की तैयारी में है । दवाई A की 20,000 बोतलें तथा दवाई B की 40,000 बोतलें बनाने के लिए पर्याप्त सामग्री उपलब्ध है परन्तु केवल 45,000 बोतलें ही उपलब्ध हैं, जिनमें दोनों में से किसी भी प्रकार की दवाई रखी जा सकती है । दवाई A की 1000 बोतलों को भरने के लिए पर्याप्त माल बनाने में 3 घंटे लगते हैं । दवाई B की 1000 बोतलों को भरने के लिए पर्याप्त माल बनाने में 1 घंटा लगता है । इस प्रक्रिया के लिए 66 घंटे उपलब्ध हैं । दवाई A की प्रत्येक बोतल पर ₹ 8 और दवाई B की प्रत्येक बोतल पर ₹ 7 का लाभ होता है । इस समस्या को एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रित कीजिए । *4*

(ख) उत्तर-पश्चिम कोना विधि द्वारा निम्नलिखित परिवहन समस्या का प्रारम्भिक आधारी सुसंगत हल ज्ञात कीजिए :

	P_1	P_2	P_3	P_4	आवश्यकता
M_1	19	11	23	11	11
M_2	15	16	12	21	13
M_3	30	25	16	39	19
उपलब्धता	6	10	12	15	113

इष्टतम हल भी ज्ञात कीजिए । *6*

6. (क) दिखाइए कि समुच्चय

$$S = \{(x, y) \mid 3x^2 + 5y^2 \leq 15\}$$

अवमुख है । *4*

(ख) दिखाइए कि निम्नलिखित सदिशों $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ और $\mathbf{a}_3$ रूपों का समुच्चय E^3 के लिए एक आधार है : *3*

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(ग) निम्नलिखित समीकरण निकाय को लीजिए :

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 11$$
$$3x_1 + x_2 + 5x_3 = 14$$

एक सुसंगत हल $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 1$ है । इस सुसंगत हल को एक आधारी सुसंगत हल में समानीत कीजिए । *3*

7. (क) निम्नलिखित भुगतान आव्यूह वाले खेल को हल कीजिए : *5*

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 8 \\ 7 & 5 & -1 \\ 6 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

(ख) 5 कार्यों को 5 उपलब्ध मशीनों पर नियत करना है । भिन्न-भिन्न कार्यों को भिन्न-भिन्न मशीनों पर नियत करने पर प्राप्त लाभ (₹ में) निम्नलिखित आव्यूह में दिया गया है :

$$\begin{array}{c} \\ J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 11 & 10 & 12 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 12 & 5 & 14 & 6 \\ 6 & 14 & 4 & 11 & 7 \\ 7 & 9 & 8 & 12 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

वह नियतन ज्ञात कीजिए जिससे कि अधिकतम कुल लाभ प्राप्त हो । *5*