02434

No. of Printed Pages : 12

MTE-11

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2015

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-11 : PROBABILITY AND STATISTICS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Question no.* ***7*** *is* ***compulsory****. Answer any* ***four*** *questions from questions no.* ***1*** *to* ***6****. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

---

1. (a) Explain the method of constructing histogram and frequency polygon. Out of these two curves, which is a better representative of frequencies of (i) a sample from the population and (ii) population ? *3*

(b) The probability density function of a random variable X is

$$f(x) = kx^3 (4 - x)^2; \quad 0 \le x \le 4.$$

Find the value of k, the mean and standard deviation of the distribution. *4*

(c) A drug manufacturer, who produces medicine bottles, finds that 0·1% bottles are defective. The bottles are packed in boxes containing 500 bottles each. How many boxes will contain at least two defective bottles, if 100 boxes are selected at random ? *3*

[You may use the following values :
$e^{-0.5} = 0.6065$, $e^{-0.05} = 0.9512$]

2. (a) Consider the following probability distribution : *4*

X ↓ \ Y →	0	1	2
0	0·1	0·2	0·1
1	0·2	0·3	0·1

Calculate V(X + Y).

(b) The joint probability density function of (X, Y) is given by

$$f(x, y) = 2; \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < x.$$

(i) Find the marginal distribution of X and Y.

(ii) Find the conditional density functions of Y given X = x and of X given Y = y.

(iii) Are X and Y independent ? Give reasons for your answer. *4*

(c) If T is an unbiased estimator for θ, show that T^2 is a biased estimator for θ^2. *2*

3. (a) Let p be the probability that a coin will fall head in a single toss. In order to test $H_0 : p = \frac{1}{2}$ against $H_1 : p = \frac{3}{4}$, the coin is tossed 5 times. H_0 is rejected if more than 3 heads are obtained. Find the probability of type I error and the power of the test. *6*

(b) Two fair dice are thrown independently. Three events A, B and C are defined as follows :

A : odd face on first dice

B : odd face on second dice

C : sum of points on two dice is odd.

Check whether the events A, B and C are (i) pairwise independent, (ii) mutually independent. *4*

4. (a) The first four moments of a distribution about the value 4 are – 1·5, 17, – 30 and 108. Find the first four moments about mean. Also find Pearson's coefficient (b_1) and coefficient of kurtosis (b_2). *5*

(b) Find the probability of success for a binomial variate X, if $n = 6$ and $9\,P(X = 4) = P(X = 2)$. *2*

(c) If a random variable U has t-distribution with n degrees of freedom, then show that $Z = U^2$ has F-distribution with 1 and n degrees of freedom. *3*

5. (a) The following table gives the classification of 100 workers according to gender and nature of work. Test whether the nature of work is independent of the gender of the worker at 5% level of significance. *5*

	Skilled	Unskilled
Males	40	20
Females	10	30

[You may use the following values :

$\chi^2_{1,0\cdot05} = 3\cdot841$, $\chi^2_{2,0\cdot05} = 5\cdot991$, $\chi^2_{3,0\cdot05} = 7\cdot815$]

(b) For a certain data, $Y = 1\cdot2\,X$ and $X = 0\cdot6\,Y$ are the two regression lines. Compute $V(X)/V(Y)$. Also find the coefficient of correlation between X and Y. *5*

6. (a) Find the median wage of the following distribution : *3*

Wage (in ₹)	No. of employees
2,000 – 3,000	3
3,000 – 4,000	5
4,000 – 5,000	20
5,000 – 6,000	10
6,000 – 7,000	5

(b) An urn contains 8 white and 8 black balls. A ball is drawn at random, its colour is noted and is returned to the urn. Moreover, 2 additional balls of the colour drawn are put in the urn and then a ball is drawn at random. What is the probability that the second ball drawn is black ? *3*

(c) The height of students in a class follows approximately a normal distribution with mean 50 inches and standard deviation 2. Find the probability that a student selected at random has height

(i) less than 48 inches,

(ii) between 48 inches and 52 inches. *4*

[You may use the following values :

$\phi(1) = 0{\cdot}8413, \quad \phi(-1) = 0{\cdot}1587,$ where

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \,]$$

7. Which of the following statements are true or false ? Give a short proof or a counter-example in support of your answer. *10*

(a) Mean always lies between median and mode.

(b) If cov (X, Y) = 0, then X and Y are dependent.

(c) Mean of Poisson distribution is 2 and variance is 3.

(d) A maximum likelihood estimator is always unbiased.

(e) If a random variable X has normal distribution with mean μ and variance σ^2, then the distribution of the variable $Y = aX + b$ is normal.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2015

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-11 : प्रायिकता और सांख्यिकी

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *प्रश्न सं. **7** **अनिवार्य** है । प्रश्न सं. **1** से **6** में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

---

1. (क) आयत-चित्र और बारम्बारता बहुभुज को बनाने की विधियों की व्याख्या कीजिए । इन दोनों में से कौन-सा वक्र निम्नलिखित के लिए बारम्बारताओं का बेहतर निरूपक है (i) समष्टि से लिया गया प्रतिदर्श तथा (ii) समष्टि ? *3*

(ख) एक यादृच्छिक चर X का प्रायिकता घनत्व फलन निम्नलिखित है :

$$f(x) = kx^3 (4 - x)^2; \ 0 \le x \le 4.$$

बंटन के लिए k का मान, माध्य और मानक विचलन ज्ञात कीजिए । *4*

(ग) एक दवाई बनाने वाला जो कि दवाइयों की बोतलों का निर्माण करता है, यह पाता है कि 0·1% बोतलें ख़राब हैं । बोतलें, डिब्बों में पैक होती हैं एवं प्रत्येक डिब्बे में 500 बोतलें आती हैं । यदि 100 डिब्बों को यादृच्छया चुना जाए, तो उनमें से कितने डिब्बों में कम-से-कम दो ख़राब बोतलें होंगी ? *3*

[आप निम्न मानों का प्रयोग कर सकते हैं : $e^{-0\cdot5} = 0\cdot6065$, $e^{-0\cdot05} = 0\cdot9512$]

2. (क) निम्नलिखित प्रायिकता बंटन को लीजिए : *4*

X ↓ \ Y →	0	1	2
0	0·1	0·2	0·1
1	0·2	0·3	0·1

V(X + Y) ज्ञात कीजिए ।

(ख) (X, Y) का संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन निम्नलिखित है :

$$f(x, y) = 2;\ 0 < x < 1,\ 0 < y < x.$$

(i) X और Y के उपांत बंटन ज्ञात कीजिए ।

(ii) यदि X = x दिया हुआ हो तो Y का और यदि Y = y दिया हुआ हो तो X का सप्रतिबंध घनत्व फलन ज्ञात कीजिए ।

(iii) क्या X और Y स्वतंत्र हैं ? अपने उत्तर के कारण दीजिए । *4*

(ग) यदि θ के लिए T एक अनभिनत आकलक है, तो दिखाइए कि θ^2 के लिए T^2 एक अभिनत आकलक होगा । *2*

3. (क) मान लीजिए कि किसी सिक्के को एक बार उछालने पर चित आने की प्रायिकता p है । $H_1 : p = \frac{3}{4}$ के विरुद्ध $H_0 : p = \frac{1}{2}$ का परीक्षण करने के लिए सिक्के को 5 बार उछाला गया । 3 से अधिक चित आने पर H_0 को अस्वीकार किया जाता है । प्रकार I त्रुटि की प्रायिकता और परीक्षण की क्षमता ज्ञात कीजिए । *6*

(ख) दो अनभिनत पासों को स्वतंत्र रूप से फेंका गया । तीन घटनाएँ A, B और C निम्नलिखित द्वारा परिभाषित हैं :

A : पहले पासे पर विषम संख्या का आना

B : दूसरे पासे पर विषम संख्या का आना

C : पहले व दूसरे पासों पर आयी संख्याओं के योगफल का विषम होना ।

जाँच कीजिए कि क्या घटनाएँ A, B और C (i) युगलत: स्वतंत्र, (ii) परस्पर स्वतंत्र हैं । *4*

4. (क) एक बंटन के मान 4 के प्रति पहले चार आघूर्ण – 1·5, 17, – 30 और 108 हैं । माध्य के प्रति पहले चार आघूर्ण ज्ञात कीजिए । पीयरसन गुणांक (b_1) और ककुदता गुणांक (b_2) भी ज्ञात कीजिए । *5*

(ख) द्विपद चर X के लिए सफलता की प्रायिकता ज्ञात कीजिए, यदि $n = 6$ और $9\,P(X = 4) = P(X = 2)$. *2*

(ग) यदि एक यादृच्छिक चर U, स्वातंत्र्य कोटि n वाला t-बंटन है, तो दिखाइए कि $Z = U^2$, स्वातंत्र्य कोटि 1 और n वाला F-बंटन होगा । *3*

5. (क) 100 कर्मचारियों का उनके लिंग और कार्य की प्रकृति के आधार पर किया गया वर्गीकरण निम्नलिखित तालिका में दिया गया है । 5% के सार्थकता स्तर पर परीक्षण कीजिए कि कार्य की प्रकृति, कर्मचारी के लिंग से स्वतंत्र है । *5*

	सक्षम	असक्षम
पुरुष	40	20
स्त्री	10	30

[आप निम्न मानों का प्रयोग कर सकते हैं :

$\chi^2_{1,0\cdot05} = 3\cdot841,\ \chi^2_{2,0\cdot05} = 5\cdot991,\ \chi^2_{3,0\cdot05} = 7\cdot815$]

(ख) किन्हीं आँकड़ों के लिए दो समाश्रयण रेखाएँ $Y = 1\cdot2\,X$ और $X = 0\cdot6\,Y$ हैं । $V(X)/V(Y)$ परिकलित कीजिए । X और Y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक भी ज्ञात कीजिए । *5*

6. (क) निम्नलिखित बंटन का माध्यिका वेतन ज्ञात कीजिए : 3

वेतन (₹ में)	कर्मचारियों की संख्या
2,000 – 3,000	3
3,000 – 4,000	5
4,000 – 5,000	20
5,000 – 6,000	10
6,000 – 7,000	5

(ख) एक पात्र में 8 सफ़ेद और 8 काली गेंदें हैं । एक गेंद यादृच्छया निकाली गई और उसके रंग को देखकर उसे पात्र में फिर से डाल दिया गया । उसी रंग की दो और गेंदें पात्र में डालकर पात्र में से एक गेंद यादृच्छया निकाली गई । निकाली गई दूसरी गेंद के काले रंग के होने की प्रायिकता क्या होगी ? 3

(ग) एक कक्षा के छात्रों की लम्बाई (ऊँचाई) लगभग एक प्रसामान्य बंटन में है जिसका माध्य 50 इंच है और मानक विचलन 2 है । इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यादृच्छया चुने गए छात्र की लम्बाई (ऊँचाई)

(i) 48 इंच से कम हो,

(ii) 48 इंच और 52 इंच के बीच हो । 4

[आप निम्न मानों का प्रयोग कर सकते हैं :

$\phi(1) = 0{\cdot}8413, \ \phi(-1) = 0{\cdot}1587,$

जहाँ $\phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$]

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य ? अपने उत्तर के पक्ष में संक्षिप्त उपपत्ति या प्रत्युदाहरण दीजिए । *10*

(क) माध्य हमेशा माध्यिका और बहुलक के बीच में होता है ।

(ख) यदि cov (X, Y) = 0, तब X और Y अस्वतंत्र्य हैं ।

(ग) प्वासों बंटन का माध्य 2 और प्रसरण 3 है ।

(घ) अधिकतम संभावित आकलक हमेशा अनभिनत होता है ।

(ङ) यदि एक यादृच्छिक चर X, माध्य μ और प्रसरण σ^2 वाला प्रसामान्य बंटन है, तो चर $Y = aX + b$ का बंटन प्रसामान्य होगा ।