No. of Printed Pages : 12

MTE-10

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

00582

December, 2015

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Answer any **five** questions. All computations may be done upto 2 decimal places. Use of calculators is **not** allowed. Symbols have their usual meanings.*

---

1. (a) Find an interval of unit length which contains the real root of

$$f(x) = x^3 - 5x + 1 = 0.$$

Construct a fixed point iteration $x = g(x)$, which converges. Verify the condition of convergence. Take the mid-point of this interval as a starting approximation and iterate twice. *5*

(b) Determine the spacing h in a table of equally spaced values for the function

$$f(x) = (2 + x)^4, \ 1 \le x \le 2,$$

so that the quadratic interpolation in this table satisfies $|\text{ error }| \le 10^{-6}$. *3*

(c) Prove that *2*

$$\frac{1}{2}(\Delta + \nabla) = \mu\delta.$$

2. (a) Find the spectral radius of the iteration matrix, when the Jacobi method is applied to the system of equations :

$$x_1 + 2x_3 = -1$$

$$x_2 - 2x_3 = 5$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = -3$$

Perform three iterations to verify that the iteration does not converge to the exact solution $(x_1, x_2, x_3) = (1, 3, -1)$ with $x^{(0)} = [0, 0, 0]^T$. *5*

(b) Find the Newton's forward-difference interpolating polynomial for the following data :

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	10	19	40	79	142	235

Hence, obtain the value of f(1·5). *5*

3. (a) Using LU-decomposition, find the inverse of the matrix

$$\begin{bmatrix} 50 & 107 & 36 \\ 25 & 54 & 20 \\ 31 & 66 & 21 \end{bmatrix}.$$

Take $l_{11} = l_{22} = l_{33} = 1$. *6*

(b) Using fourth order Taylor series method, find y(0·1) for the initial value problem $\frac{dy}{dx} = x^2y - 1, y(0) = 1,$ taking $h = 0{\cdot}1$. *4*

4. (a) Applying Gauss – Seidel iteration method, solve the system of equations :

$$20x + y - 2z = 17$$

$$3x + 20y - z = -18$$

$$2x - 3y + 20z = 25$$

Perform two iterations with zero vector as an initial approximation. *3*

(b) Applying fourth order Runge – Kutta method, find the value of y(0·2) for the initial value problem $\frac{dy}{dx} = x + y, \; y(0) = 1.$

Take h = 0·2. *4*

(c) Using divided differences, show that the data

x	– 3	– 2	– 1	1	2	3
f(x)	18	12	8	6	8	12

represents a second degree interpolating polynomial. Hence, obtain the polynomial. *3*

5. (a) Find the truncation error and the order of the method

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3\,f(x_0) + 4\,f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)]$$

Using this method and the Richardson's extrapolation obtain the best value of f′(2) from the following data : *5*

x	2	3	4	6	10
f(x)	9	28	65	217	1001

(b) Evaluate $\int_{1}^{5} \frac{dx}{1+x^2}$ using Simpson's rule with h = 2 and 1. Improve the result using the Romberg integration. *5*

6. (a) Derive the Regula-Falsi method to find a simple root of the equation f(x) = 0. *5*

(b) Estimate the eigenvalues of the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & -13 & 18 \\ 4 & -10 & 14 \end{bmatrix}$$

using the Gerschgorin bounds. Draw a rough sketch of the region which contains the eigenvalues. *5*

7. (a) Perform three iterations of the inverse power method to obtain the smallest eigenvalue in magnitude of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$. Take the initial approximation to the eigenvector as $[0{\cdot}9, 1{\cdot}0]^T$. *4*

(b) The polynomial equation

$$9x^3 + 6x^2 + 6x + 4 = 0$$

has a root close to $-0{\cdot}6$. Find this root using two iterations of the Birge – Vieta method. Hence, obtain the deflated polynomial and find the remaining roots. *6*

एम.टी.ई.-10

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2015

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे | *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी अभिकलन दो दशमलव स्थानों तक निकटित कर सकते हैं । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं ।*

---

1. (क) एकक लम्बाई वाला वह अंतराल ज्ञात कीजिए जो समीकरण

$$f(x) = x^3 - 5x + 1 = 0$$

के वास्तविक मूल को अंतर्विष्ट करता है । नियत बिन्दु पुनरावृत्ति $x = g(x)$ प्राप्त कीजिए, जो अभिसरित हो । अभिसरण के प्रतिबन्ध की जाँच कीजिए । इस अंतराल के मध्य-बिन्दु को प्रारम्भिक सन्निकटन मान कर दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए । *5*

(ख) फलन $f(x) = (2 + x)^4, \ 1 \le x \le 2$ के समदूरी मानों की तालिका से एक ऐसा अंतर h ज्ञात कीजिए जिससे कि इस तालिका में द्विघात अंतर्वेशन | त्रुटि | $\le 10^{-6}$ को संतुष्ट करता हो । 3

(ग) सिद्ध कीजिए कि 2

$$\frac{1}{2}(\Delta + \nabla) = \mu\delta .$$

2. (क) समीकरण निकाय

$$x_1 + 2x_3 = -1$$

$$x_2 - 2x_3 = 5$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = -3$$

पर जैकोबी विधि लागू किए जाने पर पुनरावृत्ति आव्यूह की स्पेक्ट्रमी त्रिज्या ज्ञात कीजिए । तीन पुनरावृत्तियाँ करके यह जाँच कीजिए कि पुनरावृत्ति यथातथ हल $(x_1, x_2, x_3) = (1, 3, -1)$ की ओर अभिसरित नहीं होती जहाँ $x^{(0)} = [0, 0, 0]^T$. 5

(ख) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए न्यूटन अग्रांतर अंतर्वेशन बहुपद ज्ञात कीजिए :

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	10	19	40	79	142	235

अत: $f(1{\cdot}5)$ का मान प्राप्त कीजिए । 5

3. (क) $l_{11} = l_{22} = l_{33} = 1$ लेकर LU-वियोजन विधि द्वारा आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 50 & 107 & 36 \\ 25 & 54 & 20 \\ 31 & 66 & 21 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए । *6*

(ख) $h = 0{\cdot}1$ लेकर कोटि चार की टेलर श्रेणी विधि का प्रयोग करके आदि मान समस्या $\frac{dy}{dx} = x^2y - 1,\ \ y(0) = 1$ के लिए $y(0{\cdot}1)$ ज्ञात कीजिए । *4*

4. (क) गाउस – सीडल पुनरावृत्ति विधि लागू करके निम्नलिखित समीकरण निकाय का हल प्राप्त कीजिए :

$$20x + y - 2z = 17$$

$$3x + 20y - z = -18$$

$$2x - 3y + 20z = 25$$

शून्य सदिश को प्रारम्भिक सन्निकटन मान कर दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए । *3*

(ख) आदि मान समस्या $\frac{dy}{dx} = x + y,\ y(0) = 1$ के लिए h = 0·2 लेकर चतुर्थ कोटि रूंगे – कुट्टा विधि लागू करके $y(0{\cdot}2)$ का मान ज्ञात कीजिए । *4*

(ग) विभाजित अंतरों का प्रयोग करके, दिखाइए कि आँकड़े

x	– 3	– 2	– 1	1	2	3
f(x)	18	12	8	6	8	12

द्वितीय घात अंतर्वेशन बहुपद को निरूपित करते हैं । अत: बहुपद प्राप्त कीजिए । *3*

5. (क) विधि

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3\,f(x_0) + 4\,f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)]$$

की कोटि और रुंडन त्रुटि ज्ञात कीजिए । इस विधि और रिचर्डसन बहिर्वेशन का प्रयोग करके निम्नलिखित आँकड़ों से $f'(2)$ का सर्वोत्तम मान प्राप्त कीजिए : *5*

x	2	3	4	6	10
f(x)	9	28	65	217	1001

(ख) $h = 2$ और 1 के लिए सिम्प्सन नियम द्वारा $\int_{1}^{5} \frac{dx}{1 + x^2}$ का मूल्यांकन कीजिए । रॉम्बर्ग समाकलन द्वारा परिशुद्धता में सुधार कीजिए । 5

6. (क) समीकरण $f(x) = 0$ का सरल मूल ज्ञात करने के लिए मिथ्या-स्थिति विधि व्युत्पन्न कीजिए । 5

(ख) गर्शगोरिन परिबंधों से आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & -13 & 18 \\ 4 & -10 & 14 \end{bmatrix}$$

के आइगेनमान आकलित कीजिए । उस प्रदेश का ग्राफ़ (रफ़ स्केच) बनाइए जहाँ आइगेनमान स्थित हैं । 5

7. (क) प्रतिलोम घात विधि की तीन पुनरावृत्तियाँ करके आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ का परिमाण में लघुतम आइगेनमान प्राप्त कीजिए । प्रारम्भिक सन्निकट आइगेनसदिश $[0{\cdot}9, 1{\cdot}0]^T$ से आरम्भ कीजिए । 4

(ख) बहुपद समीकरण

$$9x^3 + 6x^2 + 6x + 4 = 0$$

का $-0 \cdot 6$ के निकट एक मूल है । बर्ज – विएटा विधि की दो पुनरावृत्तियाँ करके यह मूल ज्ञात कीजिए । अत: अपस्फीत बहुपद प्राप्त कीजिए और शेष मूल ज्ञात कीजिए । 6