No. of Printed Pages : 12

MTE-09

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

01532

Term-End Examination

December, 2015

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-09 : REAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Attempt **five** questions in all. Question no. **1** is **compulsory**. Do any **four** questions out of questions no. **2** to **7**. Use of calculators is **not** allowed.*

1. Are the following statements *True* or *False* ? Give reasons for your answers. *10*

(a) Every finite set is an open set.

(b) $\lim_{x \to 1} (x - 1) \tan\left(\frac{1}{x-1}\right) = 1.$

(c) The function f defined on **R** by

$f(x) = | x + 3 |$ has a local minima at $x = -3$.

(d) Every Riemann integrable function is not necessarily differentiable.

(e) If $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$, then the series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ is convergent.

2. (a) Using the principle of induction, show that $| \sin nx | \leq n | \sin x |, \forall x \in \mathbf{R}$ and $\forall n \in \mathbf{N}$. *4*

(b) Find the least and the greatest values of the function f defined by

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 36x - 5$$

on the interval [0, 2]. *4*

(c) Check the convergence or divergence of the following series : *2*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2nx}{n^2}.$$

3. (a) Find the Maclaurin's series expansion of the function, cos 3x. *5*

(b) Using Weierstrass M-test, show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} (n^3 + 1)\, x^n$ converges uniformly in $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$. 3

(c) Show that the set $B = \{x \mid x^2 > 2\}$ is non-empty and bounded below. Is it bounded above ? Justify. 2

4. (a) Find the upper and lower integrals of the function f defined by

$$f(x) = \frac{7}{2} - 2x, \quad \forall\, x \in [1, 3].$$

Is f integrable over the interval [1, 3] ? Justify. 5

(b) Show that the function f defined on **R** by

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 \cos\dfrac{1}{2x}, & \text{when } x \neq 0 \\ 0, & \text{when } x = 0 \end{cases}$$

is derivable on **R** but f′ is not continuous at $x = 0$. 3

(c) Examine the following series for convergence : 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-3}{3n+1}\right)^n$$

5. (a) In the following cases, check whether the given sequence, $\langle a_n \rangle$ satisfies the property given alongside. 4

(i) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ is monotonic.

(ii) $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ is Cauchy.

(b) Show that the function f given by

$$f(x) = \frac{1}{(x+2)^3}, \forall\, x \in]-2, 2[$$

is continuous but not bounded in $]-2, 2[$. 4

(c) Give an example of an infinite set with finite number of limit points, giving justification. 2

6. (a) Find the limit as $n \to \infty$ of the sum

$$\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{2n\pi}{n}\right]. \qquad 4$$

(b) Evaluate the following limit if it exists : 3

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x^3}{\tan^3 x + \tan x - x}$$

(c) Let A and B be any two subsets of X and $f : X \to Y$ be any function. Show that

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \ldots [1]$$

where $f(S) = \{f(x) : x \in S\}$ for any subset $S \subset X$. Also give an example showing that the reverse inclusion in [1] may not hold for $f(x) = x^2$. 3

7. (a) Test the following series for convergence : 4

$$\frac{2.4}{3.5} + \frac{2.4.6}{3.5.7}x + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}x^2 + \ldots (x > 0).$$

(b) Show that the function $\sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ is continuous but not uniformly in $]0, 2[$. 3

(c) Find the value of $a \in \mathbf{R}$ for which

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(3x+4)(x-1)(2x+1)}{ax^3 + x - 4} \text{ exists.}$$ 3

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2015

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-09 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट : *कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न सं. **1** **अनिवार्य** है । प्रश्न सं. **2** से **7** में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

---

1. क्या निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं अथवा *असत्य* ? अपने उत्तरों के कारण बताइए । *10*

(क) प्रत्येक परिमित समुच्चय एक विवृत समुच्चय होता है ।

(ख) $\lim_{x \to 1} (x - 1) \tan\left(\frac{1}{x-1}\right) = 1.$

(ग) $f(x) = |x + 3|$ द्वारा $\mathbf{R}$ पर परिभाषित फलन f के लिए $x = -3$ पर एक स्थानिक न्यूनतम होता है ।

(घ) यह ज़रूरी नहीं कि प्रत्येक रीमान समाकलनीय फलन अवकलनीय हो ।

(ङ) यदि $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$, तब श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ अभिसारी है ।

2. (क) आगमन नियम का प्रयोग करके, दिखाइए कि

$|\sin nx| \leq n\,|\sin x|, \forall\, x \in \mathbf{R}$ और $\forall\, n \in \mathbf{N}$. *4*

(ख) अन्तराल [0, 2] पर

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 36x - 5$$

द्वारा परिभाषित फलन f के न्यूनतम और महत्तम मान ज्ञात कीजिए । *4*

(ग) निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण अथवा अपसरण की जाँच कीजिए : *2*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2nx}{n^2}.$$

3. (क) फलन $\cos 3x$ का मैक्लॉरिन श्रेणी प्रसार ज्ञात कीजिए । *5*

(ख) वाइएर्स्ट्रास M-परीक्षण का प्रयोग करते हुए, दिखाइए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} (n^3+1)\,x^n$, $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ में एकसमानत: अभिसरण करती है । 3

(ग) दिखाइए कि समुच्चय $B = \{x \mid x^2 > 2\}$ अरिक्त है और नीचे परिबद्ध है । क्या यह ऊपर परिबद्ध है ? पुष्टि कीजिए । 2

4. (क) $f(x) = \frac{7}{2} - 2x, \forall\, x \in [1, 3]$ द्वारा परिभाषित फलन f के उपरि और निम्न समाकल ज्ञात कीजिए । क्या f अंतराल [1, 3] पर समाकलनीय है ? पुष्टि कीजिए । 5

(ख) दिखाइए कि $\mathbf{R}$ पर

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 \cos\frac{1}{2x}, & \text{जब } x \neq 0 \\ 0, & \text{जब } x = 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन f, $\mathbf{R}$ पर अवकलनीय है लेकिन f', $x = 0$ पर संतत नहीं है । 3

(ग) अभिसरण के लिए निम्नलिखित श्रेणी की जाँच कीजिए : 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-3}{3n+1} \right)^n$$

5. (क) निम्नलिखित मामलों में, जाँच कीजिए कि दिया गया अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ साथ में दिए गए गुणधर्म को संतुष्ट करता है या नहीं । 4

(i) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ एकदिष्ट है ।

(ii) $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ कौशी है ।

(ख) दिखाइए कि $f(x) = \frac{1}{(x+2)^3}, \forall\, x \in]-2, 2[$ द्वारा दिया गया फलन f संतत है लेकिन $]-2, 2[$ में परिबद्ध नहीं है । 4

(ग) सीमा बिन्दुओं की परिमित संख्या वाले अनंत समुच्चय का एक पुष्टि सहित उदाहरण दीजिए । 2

6. (क) योगफल $\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{2n\pi}{n}\right]$

की सीमा ज्ञात कीजिए जो कि $n \to \infty$ हो । *4*

(ख) निम्नलिखित सीमा का यदि अस्तित्व है तो इसका मूल्यांकन कीजिए : *3*

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x^3}{\tan^3 x + \tan x - x}$$

(ग) मान लीजिए A और B, X के कोई दो उपसमुच्चय हैं और $f : X \to Y$ कोई फलन है । दिखाइए कि

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \ldots [1]$$

जहाँ किसी भी उपसमुच्चय $S \subset X$ के लिए

$$f(S) = \{f(x) : x \in S\}.$$

एक उदाहरण द्वारा यह भी दिखाइए कि $f(x) = x^2$ के लिए इसका ([1] का) उल्टा क्रम लागू नहीं होता । *3*

7. (क) अभिसरण के लिए निम्नलिखित श्रेणी की जाँच कीजिए : *4*

$$\frac{2.4}{3.5} + \frac{2.4.6}{3.5.7}x + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}x^2 + \ldots (x > 0).$$

(ख) दिखाइए कि फलन $\sin\frac{1}{x}(x \neq 0)$ संतत है लेकिन]0, 2[में एकसमानत: संतत नहीं है । 3

(ग) $a \in \mathbf{R}$ का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(3x+4)(x-1)(2x+1)}{ax^3 + x - 4}$$

का अस्तित्व है । 3