No. of Printed Pages : 12

MTE-08

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

01762

December, 2015

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-08 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. 1 is* ***compulsory****. Attempt any* ***four*** *questions from the remaining questions no. 2 to 7. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

---

1. State whether the following statements are *True* or *False*. Justify your answer with the help of a short proof or a counter-example. *5×2=10*

(a) The initial value problem

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}, \; y(0) = 0,$$

may not have a unique solution in $R(|x| < 1, |y| < 1)$.

(b) The integrating factor of the differential equation

$$\left(y + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}x^2\right) dx + (1 + y^2)x\, dy = 0,$$

is $\frac{1}{x^2}$.

(c) The solution of differential equation

$(D^2 + 4D + 4)\, y = 0$ satisfying $x = 0$, $y = 1$ and $y' = -1$ is $(1 + x)\, e^{2x}$.

(d) The partial differential equation formed from the following relation

$$2z = (x + a)^2 + (y + a)^2 + b,$$

is $(q - p + x - y) = 0$.

(e) The differential equation

$$(1 - x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + (1 - y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2x\frac{\partial z}{\partial x} + 3y\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

is elliptic for all (x, y) outside the circle $x^2 + y^2 = 1$.

2. Solve the following differential equations :

(a) $(x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$ *3*

(b) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 + \sin(5\,ln\,x)$ *4*

(c) $$2x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 5xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 2y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$ *3*

3. (a) The differential equation of damped vibrating system under the action of an external periodic force is

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2r\frac{dx}{dt} + n^2x = a\cos pt.$$

Show that if $n > r > 0$, the complementary function represents vibrations which are ultimately damped out. Further, prove that the particular integral is of the form $b\cos(pt - \alpha)$, where

$$b^2 = a^2/[(n^2 - p^2)^2 + 4r^2p^2].$$ *4*

(b) Outline briefly the fundamental idea of Jacobi's method of solving non-linear partial differential equation $f(x, y, z, p, q) = 0$. Give its advantage over Charpit's method of solving the same equation. *2*

(c) Solve : 4

$$(D^2 + DD' - 6D'^2)\, z = y \cos x$$

4. (a) Find the general solution and the singular solution, if it exists, of the differential equation

$$p^2 - xp + y = 0, \quad p = \frac{dy}{dx}.$$ 3

(b) Solve the following differential equation by changing the independent variable

$$y'' + \cot x\, y' + 4 \operatorname{cosec}^2 x\, y = 0.$$ 4

(c) Solve : 3

$$(z - y)\, p + (x - z)\, q = y - x$$

5. (a) Solve : 3

$$6y^2\, dx - x\,(2x^3 + y)\, dy = 0$$

(b) Solve, by using the method of variation of parameters, the following differential equation : 5

$$(D^2 - 3D + 2)\, y = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

(c) Find the homogeneous linear differential equation with constant coefficients that has the following function as a solution

$$x^2 e^{-x} + 4e^x .$$ *2*

6. (a) Using the transformation $x^2 = X$, $y^2 = Y$, reduce the partial differential equation

$$x^2q^2(x^2 + y^2) - p^2q^2 - x^2y^2 = 0$$

to a form $f(P, X) = g(Q, Y)$ where

$$P = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Obtain the complete integral of the resulting differential equation. *4*

(b) A certain population is known to be growing at a rate given by the logistic equation

$$\frac{dx}{dt} = x(a - bx),$$

a and b are positive constants. Show that the maximum rate of growth occurs when the population is equal to half the equilibrium size, that is, when the population is $\left(\frac{a}{2b}\right)$. *4*

(c) Check for compatibility the following partial differential equations : 2

$$xp - yq = 0$$

$$z(xp + yq) = 2xy$$

7. (a) Find the complete integral of

$$(p^2 + q^2)\, y = qz.$$ 4

(b) Solve the Laplace equation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, in a rectangle, with

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0$$

$$u(x, b) = \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad u(x, 0) = 0.$$ 6

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2015

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-08 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे | *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *प्रश्न सं. 1 करना **अनिवार्य** है । शेष प्रश्न सं. 2 से 7 में से कोई **चार** प्रश्न कीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं या *असत्य* । संक्षिप्त उपपत्ति अथवा प्रत्युदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *5×2=10*

(क) आदि मान समस्या

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}},\ y(0) = 0 \text{ का}$$

$$R(|x| < 1, |y| < 1)$$

में एक अद्वितीय हल नहीं भी हो सकता ।

(ख) अवकल समीकरण

$$\left(y + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}x^2\right)dx + (1 + y^2)x\,dy = 0$$

का समाकलन गुणक $\frac{1}{x^2}$ है ।

(ग) $x = 0$, $y = 1$ और $y' = -1$ को संतुष्ट करने वाले अवकल समीकरण $(D^2 + 4D + 4)\,y = 0$ का हल $(1 + x)\,e^{2x}$ है ।

(घ) निम्नलिखित सम्बन्ध

$$2z = (x + a)^2 + (y + a)^2 + b$$

से प्राप्त आंशिक अवकल समीकरण

$(q - p + x - y) = 0$ है ।

(ङ) अवकल समीकरण

$$(1 - x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + (1 - y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2x\frac{\partial z}{\partial x} + 3y\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ के बाहर सभी (x, y) के लिए दीर्घवृत्तीय है ।

2. निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

(क) $(x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$ *3*

(ख) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 + \sin(5\,ln\,x)$ *4*

(ग) $$2x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 5xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 2y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$ *3*

3. (क) बाहरी आवर्ती बल के अधीन एक अवमंदित कम्पायमान तंत्र का अवकल समीकरण

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2r\frac{dx}{dt} + n^2x = a\cos pt$$

है । दिखाइए कि यदि $n > r > 0$, तब अवकल समीकरण का पूरक फलन उन कम्पनों को निरूपित करता है जो आख़िरकार अवमंदित हो जाएँगी । यह भी सिद्ध कीजिए कि विशिष्ट समाकल $b\cos(pt - \alpha)$ के रूप का है, जहाँ *4*

$$b^2 = a^2/[(n^2 - p^2)^2 + 4r^2p^2]\,.$$

(ख) अरैखिक आंशिक अवकल समीकरण $f(x, y, z, p, q) = 0$ को हल करने के लिए जैकोबी विधि की मूलभूत योजना को संक्षिप्त में लिखिए । इसी समीकरण को चार्पिट विधि से हल किए जाने के मुकाबले जैकोबी विधि से हल करने के लाभ बताइए । *2*

(ग) हल कीजिए : 4

$$(D^2 + DD' - 6D'^2)\, z = y \cos x$$

4. (क) अवकल समीकरण

$$p^2 - xp + y = 0, \;\; p = \frac{dy}{dx}$$

का व्यापक हल और विचित्र हल, यदि इसका अस्तित्व है, तो ज्ञात कीजिए । 3

(ख) स्वतंत्र चर परिवर्तन विधि द्वारा निम्नलिखित अवकल समीकरण

$$y'' + \cot x\, y' + 4 \operatorname{cosec}^2 x\, y = 0$$

का हल प्राप्त कीजिए । 4

(ग) हल कीजिए : 3

$$(z - y)\, p + (x - z)\, q = y - x$$

5. (क) हल कीजिए : 3

$$6y^2\, dx - x\,(2x^3 + y)\, dy = 0$$

(ख) प्राचल विचरण विधि द्वारा निम्नलिखित अवकल समीकरण

$$(D^2 - 3D + 2)\, y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

का हल प्राप्त कीजिए । 5

(ग) अचर गुणांकों वाला वह समघात रैखिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका हल निम्नलिखित समीकरण

$$x^2 e^{-x} + 4e^x$$

के रूप में है । *2*

6. (क) रूपान्तरण $x^2 = X$, $y^2 = Y$ का प्रयोग करके, आंशिक अवकल समीकरण

$$x^2q^2(x^2 + y^2) - p^2q^2 - x^2y^2 = 0$$

को $f(P, X) = g(Q, Y)$ के रूप में समानीत कीजिए

जहाँ $P = \frac{\partial z}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

प्राप्त अवकल समीकरण का पूर्ण समाकल भी प्राप्त कीजिए । *4*

(ख) एक जनसंख्या में वृद्धि हो रही है जिसकी दर वृद्धिघात समीकरण $\frac{dx}{dt} = x(a - bx)$, जहाँ a और b धनात्मक अचर हैं, द्वारा प्राप्त है । दिखाइए कि अधिकतम वृद्धि दर तब होती है जब जनसंख्या संतुलन आकार (साइज़) के आधे के बराबर होती है, अर्थात् जब जनसंख्या $\left(\frac{a}{2b}\right)$ होती है । *4*

(ग) निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरणों की सुसंगता की जाँच कीजिए : *2*

$$xp - yq = 0$$

$$z(xp + yq) = 2xy$$

7. (क) $(p^2 + q^2)\, y = qz$ का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए । *4*

(ख) लाप्लास समीकरण $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ का हल एक आयत, जहाँ

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0$$

$$u(x, b) = \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad u(x, 0) = 0$$

में प्राप्त कीजिए । *6*