

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

December, 2015

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-07 : ADVANCED CALCULUS

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage 70%)

Note : Question no. 1 is **compulsory**. Attempt any **four** questions out of the remaining questions. Use of calculators is **not** allowed.

1. State whether the following statements are true or false. Give justification for your answers. 10

(a) $e^{5x} - \sin\left(\frac{1}{5x} + x\right)$ is an indeterminate form of the type $\infty - \infty$.

(b) $f(x, y) = \frac{x^2 + 2}{y}$ is a homogeneous function of degree 1.

(c) If $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ and $C = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$, then $S \subset C$.

(d) The work done by the force $F(x, y) = (-y, x)$ in moving a particle along the boundary of the ellipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ is 6.

(e) Every stationary point is a saddle point.

2. (a) Let $f(x, y) = 2 - 3xy$, $xy \neq 0$
 $= 0$, $xy = 0$.

Show that the two repeated limits of f exist, and are equal, but the simultaneous limit does not exist as $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

6

- (b) Prove that the functions $g(x, y) = \frac{2x - 3y}{4x + 5y}$

and $h(x, y) = \frac{x}{y}$, $y \neq 0$, $y \neq -\frac{4}{5}x$ are

functionally dependent.

4

3. (a) Evaluate $f_{xy}(0, 0)$, if it exists, for

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x^2/y^2, & y \neq 0 \\ x/2, & y = 0. \end{cases}$$

4

- (b) Find the volume of the region lying under the paraboloid $z = 9 - x^2 - y^2$ and above the plane $z = 0$. Draw a suitable sketch.

6

4. (a) Find the directional derivative of

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

at $(0, 0)$ in the direction of (i) $\theta = \frac{\pi}{2}$,

(ii) $\theta = \frac{\pi}{4}$.

5

- (b) Check if the following integrals are independent of path and evaluate those which are independent :

5

(i) $\int_{(0,0)}^{(3,4)} (6xy - y^3) dx + (3x^2 - x^3y) dy$

(ii) $\int_{(-1,4)}^{(3,8)} (3x^2 - 2y^2) dx - 4xy dy$

5. (a) Find the extreme points of the function $f(x, y) = 2xy - 3y^2$, if any.

3

- (b) Check whether the function given by $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ is continuous at $(1, 2)$. Is the function differentiable at $(1, 2)$? Justify your answer.

4

- (c) Find the domain of the function

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Find the equation of a level curve of this function, passing through $(1, 1)$.

3

6. (a) Evaluate :

2

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x}$$

(b) Evaluate $\iiint_S z^2 \, dx \, dy \, dz$, where S is

the solid region between the spheres $\rho = 1$ and $\rho = 2$, by using spherical coordinates.

5

(c) The relation between x , y and z is given by $x + y + z + \sin(x, y, z) = 0$. Can this be expressed in the form $z = f(x, y)$ in a neighbourhood of $(0, 0)$? Justify.

3

7. (a) Let $e_1 = (0, 1, 2)$, $e_2 = (2, 1, 0)$, $e_3 = (1, 2, 2)$ and $x = e_1 - 2e_2 + e_3$; $y = e_1 + e_2 - e_3$. Find $|2x - 5y|$.

4

(b) Find the third Taylor polynomial of the function $f(x, y) = \cos^2(x + y)$ at $(0, 0)$.

4

(c) Evaluate :

2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2x^2 + 3x - 2} - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} \right)$$

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2015

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-07 : उच्च कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का 70%)

नोट: प्रश्न सं. 1 करना अनिवार्य है। शेष प्रश्नों में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए।

10

(क) $e^{5x} - \sin\left(\frac{1}{5x} + x\right)$ प्रकार $\infty - \infty$ का एक अनिर्धार्य रूप है।

(ख) $f(x, y) = \frac{x^2 + 2}{y}$ घात 1 का समघात फलन है।

(ग) यदि $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ और

$C = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$,

तब $S \subset C$.

(घ) दीर्घवृत्त $9x^2 + 4y^2 = 36$ की परिसीमा के अनुदिश एक कण को ले जाने में $F(x, y) = (-y, x)$ बल द्वारा किया गया कार्य 6 होता है ।

(ङ) प्रत्येक स्तब्ध बिन्दु पल्याण बिन्दु है ।

2. (क) मान लीजिए $f(x, y) = 2 - 3xy$, $xy \neq 0$

$$= 0, \quad xy = 0$$

है, तब दिखाइए कि f की दो पुनरावृत्त सीमाओं का अस्तित्व होता है और वे समान होती हैं, किन्तु $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ होने पर युगपत् सीमा का अस्तित्व नहीं होता ।

6

(ख) सिद्ध कीजिए कि फलन $g(x, y) = \frac{2x - 3y}{4x + 5y}$ और

$$h(x, y) = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0, \quad y \neq -\frac{4}{5}x \text{ फलनिकतः आश्रित हैं ।}$$

4

3. (क) $f_{xy}(0, 0)$ का मूल्यांकन कीजिए यदि निम्नलिखित के लिए इसका अस्तित्व है :

4

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x^2/y^2, & y \neq 0 \\ x/2, & y = 0. \end{cases}$$

(ख) परवलयज $z = 9 - x^2 - y^2$ के नीचे और समतल $z = 0$ के ऊपर स्थित प्रदेश का आयतन ज्ञात कीजिए ।

उस प्रदेश का एक उपयुक्त चित्र भी बनाइए ।

6

4. (क) (i) $\theta = \frac{\pi}{2}$, (ii) $\theta = \frac{\pi}{4}$ की दिशा में (0, 0) पर

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

का दिक्-अवकलज ज्ञात कीजिए ।

5

- (ख) जाँच कीजिए कि क्या निम्नलिखित समाकल पथ स्वातंत्र्य हैं और जो स्वतंत्र हैं उनका मूल्यांकन कीजिए :

5

(i) $\int_{(0,0)}^{(3,4)} (6xy - y^3) dx + (3x^2 - x^3y) dy$

(ii) $\int_{(-1,4)}^{(3,8)} (3x^2 - 2y^2) dx - 4xy dy$

5. (क) फलन $f(x, y) = 2xy - 3y^2$ के, यदि कोई चरम बिन्दु हों, तो वे ज्ञात कीजिए ।

3

- (ख) जाँच कीजिए कि $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ द्वारा दिया गया फलन (1, 2) पर संतत है या नहीं । क्या यह फलन (1, 2) पर अवकलनीय है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए ।

4

- (ग) फलन $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ के प्रांत ज्ञात कीजिए । बिन्दु (1, 1) से गुज़रने वाले इस फलन के स्तर वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए ।

3

6. (क) मूल्यांकन कीजिए :

2

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x}$$

(ख) गोलीय निर्देशांकों का प्रयोग करते हुए

$$\iiint_S z^2 dx dy dz \text{ का मूल्यांकन कीजिए जहाँ } S$$

गोले $\rho = 1$ और $\rho = 2$ के बीच ठोस प्रदेश है ।

5

(ग) x, y और z के बीच सम्बन्ध

$x + y + z + \sin(x, y, z) = 0$ द्वारा दिया गया है ।

$(0, 0)$ के प्रतिवेश में क्या इसे $z = f(x, y)$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है ? पुष्टि कीजिए ।

3

7. (क) मान लीजिए

$e_1 = (0, 1, 2), e_2 = (2, 1, 0), e_3 = (1, 2, 2)$ और

$x = e_1 - 2e_2 + e_3; y = e_1 + e_2 - e_3$ तब

$|2x - 5y|$ ज्ञात कीजिए ।

4

(ख) $(0, 0)$ पर फलन $f(x, y) = \cos^2(x + y)$ का तृतीय टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए ।

4

(ग) मूल्यांकन कीजिए :

2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2x^2 + 3x - 2} - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} \right)$$