

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

05482

December, 2015

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-06 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage : 70%)

Note : Attempt **five** questions in all. Question no. 7 is **compulsory**. Answer any **four** questions from questions no. 1 to 6. Use of calculators is **not** allowed.

1. (a) Let

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} 2l & 2m \\ 2n & 2k \end{bmatrix} \mid l, m, n, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Check whether I is an ideal of the ring

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{Z} \right\}. \quad 3$$

(b) Let G be a group and let H be a subgroup of G. For $x \in G$, show that

$$x^{-1} H x = \{ x^{-1} h x \mid h \in H \}$$

is a subgroup of G. Further if H is finite, then prove that $|x^{-1} H x| = |H|$.

4

- (c) Show that the polynomial

$$3x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 10x + 20$$

is irreducible over $\mathbf{Q}$. Is the polynomial

$$x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

irreducible over $\mathbf{Z}_5$?

3

2. (a) Find the remainder obtained on dividing 10^{100} by 7.

2

- (b) Prove that $\frac{\mathbf{Q}[x]}{\langle x-2 \rangle} \cong \mathbf{Q}$ as fields.

4

- (c) Define a relation ' $\sim$ ' on $\mathbf{R}$ by ' $a \sim b$ if $a - b$ is an integer'. Show that this is an equivalence relation. Give the equivalence classes of 0 and $\sqrt{2}$.

4

3. (a) Find the zero divisors and the nil radical of $\mathbf{Z}_{10}$.

3

- (b) Give all possible generators of the cyclic group $G = \langle x \rangle$ of order 8.

2

- (c) Let S be the ring $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$

with respect to the usual matrix addition and multiplication. Show that, the map

$$\theta : \mathbf{R} \rightarrow S \text{ defined by } \theta(r) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \text{ is a ring}$$

homomorphism. Find the kernel of θ . Is θ $1 \rightarrow 1$? Is θ onto ? Justify your answers.

5

4. (a) Let F be a finite field such that

$$x^8 - x = \prod_{a \in F} (x - a).$$

Answer the following :

5

- (i) What is the number of elements in F ?
- (ii) What is the characteristic of F ?
- (iii) Is $\mathbb{Z}_3 \subseteq F$?

- (b) Prove that a group of order 33 is cyclic.

2

- (c) Show that $\{\bar{0}, \bar{5}, \bar{10}, \bar{15}\}$ is a maximal ideal in $\mathbb{Z}_{20}$.

3

5. (a) Use the principal of mathematical induction to prove that $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ for all positive integers n .

2

- (b) Express the permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 8 & 6 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

as a product of disjoint cycles. Also write σ as a product of transpositions. Is σ an even permutation ?

3

- (c) Find all the 9-Sylow subgroups of $\mathbb{Z}_{45}$. Are they all cyclic ? If yes, give their generators.

5

6. (a) Show that the map $\theta : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$ defined by $\theta(x) = e^x$ for all $x \in \mathbf{R}$ is a homomorphism of groups, where $\mathbf{R}^+$ denotes the group of positive real numbers under multiplication. Is θ an isomorphism ? 3
- (b) Let $H = A_4$ and $K = \{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$. Check that K is a subset as well as a subgroup of A_4 . Is it a normal subgroup of H ? Justify your answer. 4
- (c) Find the gcd of $x^3 + \bar{6}x + \bar{1}$ and $x^2 + \bar{3}$ in $\mathbf{Z}_7[x]$. 3
7. Which of the following statements are true ? Justify your answers. 10
- (a) There exists a field containing 18 elements.
- (b) Every group of order 49 is abelian.
- (c) The permutation $(2\ 4\ 6\ 8)$ is even.
- (d) $\frac{\mathbf{Z}_3[x]}{\langle x^2 + x + 1 \rangle}$ is a field.
- (e) A group G having a subgroup of index 2 has no non-trivial normal subgroups.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2015

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-06 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50
(कुल का : 70%)

नोट : कुल पाँच प्रश्न कीजिए । प्रश्न सं. 7 करना अनिवार्य है । प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरो के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।

1. (क) मान लीजिए

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} 2l & 2m \\ 2n & 2k \end{bmatrix} \mid l, m, n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

जाँच कीजिए कि I वलय

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

की गुणजावली है या नहीं ।

3

(ख) मान लीजिए G एक समूह है और मान लीजिए H , G का एक उपसमूह है । $x \in G$ के लिए दिखाइए कि

$$x^{-1} H x = \{ x^{-1} h x \mid h \in H \}$$

G का एक उपसमूह है । इसके आगे, यदि H परिमित है, तब सिद्ध कीजिए कि $|x^{-1} H x| = |H|$.

4

(ग) दिखाइए कि बहुपद

$$3x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 10x + 20$$

$\mathbf{Q}$ पर अखंडनीय है। क्या बहुपद

$$x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

$\mathbf{Z}_5$ पर अखंडनीय है ?

3

2. (क) 10^{100} को 7 से विभाजित करने पर प्राप्त होने वाला शेषफल ज्ञात कीजिए।

2

(ख) सिद्ध कीजिए कि क्षेत्र $\mathbf{Q}$, क्षेत्र $\frac{\mathbf{Q}[x]}{\langle x-2 \rangle}$ के तुल्याकारी है।

4

(ग) $\mathbf{R}$ पर सम्बन्ध ' $\sim$ ' निम्न प्रकार परिभाषित कीजिए :

' $a \sim b$ यदि $a - b$ एक पूर्णांक है'। दिखाइए कि यह एक तुल्यता सम्बन्ध है। 0 और $\sqrt{2}$ के तुल्यता वर्ग दीजिए।

4

3. (क) $\mathbf{Z}_{10}$ के शून्य भाजक और शून्य करणी ज्ञात कीजिए।

3

(ख) कोटि 8 के चक्रीय समूह $G = \langle x \rangle$ के सभी संभव जनक दीजिए।

2

(ग) मान लीजिए $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$ सामान्य

आव्यूह जमा और गुणन के सापेक्ष वलय है।

दिखाइए कि $\theta(r) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$ द्वारा परिभाषित फलन,

$\theta : \mathbf{R} \rightarrow S$ वलय समाकारिता है। θ की अष्टि ज्ञात कीजिए। क्या $\theta, 1 - 1$ है ? क्या θ आच्छादी है ? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए।

5

4. (क) मान लीजिए F एक ऐसा परिमित क्षेत्र है जिसके लिए

$$x^8 - x = \prod_{a \in F} (x - a).$$

निम्नलिखित के उत्तर दीजिए :

5

- (i) F में अवयवों की संख्या क्या है ?
- (ii) F का अभिलक्षणिक क्या है ?
- (iii) क्या $\mathbf{Z}_3 \subseteq F$ है ?

- (ख) सिद्ध कीजिए कि कोटि 33 का समूह चक्रीय है ।

2

- (ग) दिखाइए कि $\{\bar{0}, \bar{5}, \bar{10}, \bar{15}\}$ $\mathbf{Z}_{20}$ में उच्चिष्ठ गुणजावली है ।

3

5. (क) गणितीय आगमन नियम का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि सभी धनात्मक पूर्णांकों n के लिए

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2

- (ख) क्रमचय $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 8 & 6 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ को

असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए ।

σ को पक्षांतरणों के गुणनफल के रूप में भी लिखिए ।

क्या σ एक सम क्रमचय है ?

3

- (ग) $\mathbf{Z}_{45}$ के सभी 9-सिलो उपसमूह ज्ञात कीजिए । क्या वे सभी चक्रीय हैं ? यदि हाँ, तो उनके जनक दीजिए ।

5

6. (क) दिखाइए कि सभी $x \in \mathbf{R}$ के लिए $\theta(x) = e^x$ द्वारा परिभाषित फलन $\theta : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$ समूहों की समाकारिता है, जहाँ $\mathbf{R}^+$ गुणन के अधीन धनात्मक वास्तविक संख्याओं के समूह को निरूपित करता है। क्या θ एक तुल्याकारिता है ?

3

- (ख) मान लीजिए $H = A_4$ और

$$K = \{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}.$$

जाँच कीजिए कि K, A_4 का उपसमुच्चय तथा उपसमूह दोनों है। क्या यह H का प्रसामान्य उपसमूह है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

4

- (ग) $\mathbf{Z}_7[x]$ में $x^3 + \bar{6}x + \bar{1}$ और $x^2 + \bar{3}$ का gcd ज्ञात कीजिए।

3

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं ? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए।

10

(क) 18 अवयवों वाले एक क्षेत्र का अस्तित्व होता है।

(ख) कोटि 49 का प्रत्येक समूह आबेली होता है।

(ग) क्रमचय (2 4 6 8) सम है।

(घ) $\frac{\mathbf{Z}_3[x]}{\langle x^2 + x + 1 \rangle}$ एक क्षेत्र है।

(ङ) सूचकांक 2 के उपसमूह वाले समूह G के अतुच्छ प्रसामान्य उपसमूह नहीं होते।