

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME  
(BDP)**

**Term-End Examination**

02932

**December, 2015**

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS  
MTE-03 : MATHEMATICAL METHODS**

*Time : 2 hours*

*Maximum Marks : 50  
(Weightage 70%)*

---

**Note :** Question no. 7 is **compulsory**. Attempt any **four** questions from questions no. 1 to 6. Use of calculators is **not** allowed.

---

1. (a) (i) Given  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 3x + 1$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ,  
show that  $f$  is bijective. 2
- (ii) Given  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 2$ ,  $x \in \mathbf{R}$   
and  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g(x) = 3x + 5$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .  
Is  $f \circ g = g \circ f$ ? 2

(b) Evaluate :

$$3\frac{1}{2}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(1+2x)^2}$$

- (c) The probability that a man will get the contract A is  $\frac{2}{3}$  and the probability that he will not get the contract B is  $\frac{5}{9}$ . If the probability of getting at least one contract is  $\frac{4}{5}$ , what is the probability that he will get both the contracts ?

$$2\frac{1}{2}$$

2. (a) Determine the standard deviation of the random variable X whose values are given below :

$$3$$

X	32	28	47	63	71	39	10	60	96	14
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

- (b) Show that the area A of a rectangle with a given perimeter S is maximum when it is a square.

$$3\frac{1}{2}$$

- (c) The sum of three numbers in A.P. is 18. If 2, 4, 11 are added successively to the numbers then the resulting numbers are in G.P. Find the numbers.

$$3\frac{1}{2}$$

3. (a) For 5 observations of pairs  $(x, y)$  of variables  $x$  and  $y$ , the following results are obtained :  
 $\Sigma x = 15$ ,  $\Sigma y = 25$ ;  $\Sigma x^2 = 55$ ,  $\Sigma y^2 = 135$ ,  
 $\Sigma xy = 83$ . Find the two lines of regression.  
 Also estimate the values of  $x$  and  $y$  if  $y = 12$   
 and  $x = 8$ . 5

- (b) Find  $\frac{dz}{dt}$  where  $z = x^2 + 3xy + 5y^2$  and  
 $x = \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ . 3

- (c) If the roots of the equation  $x^2 - lx + m = 0$   
 differ by 1, then prove that  $l^2 = 4m + 1$ . 2

4. (a) In a Binomial distribution consisting of  
 5 independent trials, probabilities of 1 and  
 2 successes are 0.4096 and 0.2048  
 respectively. Find the probability of success.  
 Also find the mean and variance of the  
 distribution. 4

- (b) Find the sine of the angle between the  
 vectors  $\alpha = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$  and  $\beta = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ . 3

- (c) Given  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{25}$  and  $y = 5$  when  $x = 0$ .  
 Find  $x$  when  $y = 2$ . 3

5. (a) The number of accidents in a highway as recorded every month over a 9-month period are 15, 18, 9, 11, 14, 10, 8, 13, 19. Test at 5% level of significance whether these frequencies are in agreement with the belief that the number of accidents was the same during the 9 months. It is given that table values of  $\chi^2$  at 5% level for 8 d.o.f. and 9 d.o.f. are 15.5 and 16.9 respectively. 4
- (b) Find the equation of the sphere whose radius is 5 and centre is the point of intersection of the plane  $x + y + 2z = 2$  and the straight line  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-0}{-1}$ . 3
- (c) Find the equation of the normal to the curve  $y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$ , at the point where it cuts the x-axis. 3
6. (a) Measurements of a sample of 6 weights were found to be 14.3, 16.6, 15.7, 14.8, 16.2 and 15.4 kilogram respectively. (i) Determine an unbiased estimate of the population mean. (ii) Compare the sample standard deviation with the estimated population standard deviation. 4

(b) Evaluate :

3

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-3} + \sqrt{x} - \sqrt{3}}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

- (c) Find the equation of the straight line passing through the intersection of the lines  $x + 2y = 1$  and  $2x - 3y + 2 = 0$  and perpendicular to the line  $3x + y + 9 = 0$ .

3

7. State whether the following statements are true or false. Justify your answer with the help of a short proof or a counter-example.

5×2=10

- (i) The best measure of central tendency for the data 2, 4, 6, 8, 10, 98, 100 is its mean.

- (ii)  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  is maximum when  $\mathbf{a}$  and  $\mathbf{b}$  are parallel.

- (iii)  $f(x) = \begin{cases} 0.02(10 - x); & 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

is a p.d.f. of a random variable X.

(iv) Function  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  is increasing for  $0 < x \leq 1$ .

(v)  $5^3$  simple random samples of size 3 can be drawn without replacement from a population of size 5.

---

स्नातक उपाधि कार्यक्रम  
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2015

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित  
एम.टी.ई.-03 : गणितीय विधियाँ

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50  
(कुल का 70%)

---

नोट : प्रश्न सं. 7 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

---

1. (क) (i) यदि फलन  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 3x + 1$ ,  $x \in \mathbf{R}$  द्वारा परिभाषित हो, तो दिखाइए कि  $f$  एकैकी आच्छादी है। 2

(ii) यदि  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 2$ ,  $x \in \mathbf{R}$  तथा

$g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g(x) = 3x + 5$ ,  $x \in \mathbf{R}$  द्वारा परिभाषित हों, तो क्या  $f \circ g = g \circ f$ ? 2

(ख) मूल्यांकन कीजिए :

$$3\frac{1}{2}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(1+2x)^2}$$

(ग) एक व्यक्ति को ठेका A प्राप्त होने की प्रायिकता  $\frac{2}{3}$  है और उसको ठेका B न प्राप्त होने की प्रायिकता  $\frac{5}{9}$  है। यदि उसके कम-से-कम एक ठेका प्राप्त करने की प्रायिकता  $\frac{4}{5}$  है, तो उसको दोनों ठेके प्राप्त होने की प्रायिकता क्या होगी ?

$$2\frac{1}{2}$$

2. (क) यादृच्छिक चर X, जिसके मान नीचे दिए गए हैं, का मानक विचलन ज्ञात कीजिए :

3

X	32	28	47	63	71	39	10	60	96	14
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

(ख) दिखाइए कि दी गई परिधि S के लिए एक आयत का क्षेत्रफल A तब अधिकतम होता है जबकि वह एक वर्ग हो।

$$3\frac{1}{2}$$

(ग) तीन संख्याएँ, जो कि समांतर श्रेणी में हैं, का योगफल 18 है। यदि इन तीन संख्याओं में क्रमशः 2, 4, 11 जोड़े जाएँ तो इनसे एक गुणोत्तर श्रेणी प्राप्त होती है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

$$3\frac{1}{2}$$



3. (क) चरों  $x$  और  $y$  के युग्मों  $(x, y)$  के 5 प्रेक्षणों के लिए निम्नलिखित परिणाम प्राप्त हैं :

$$\begin{aligned}\Sigma x &= 15, \Sigma y = 25, \Sigma x^2 = 55, \Sigma y^2 = 135, \\ \Sigma xy &= 83. \text{ दोनों समाश्रयण रेखाएँ ज्ञात कीजिए । यदि } y = 12 \text{ और } x = 8 \text{ हो, तो } x \text{ और } y \text{ के मान भी आकलित कीजिए ।}\end{aligned}$$

5

- (ख) यदि  $z = x^2 + 3xy + 5y^2$  और  $x = \cos t$ ,  
 $y = 2 \sin t$  हो, तो  $\frac{dz}{dt}$  ज्ञात कीजिए ।

3

- (ग) यदि समीकरण  $x^2 - lx + m = 0$  के मूलों में 1 का अंतर है, तो सिद्ध कीजिए कि  $l^2 = 4m + 1$ .

2

4. (क) 5 स्वतंत्र अभिप्रयोगों वाले द्विपद बंटन में 1 और 2 सफलताएँ प्राप्त करने की प्रायिकताएँ क्रमशः 0.4096 और 0.2048 हैं । सफलता प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए । बंटन का माध्य और प्रसरण भी ज्ञात कीजिए ।

4

- (ख) सदिशों  $\alpha = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$  और  $\beta = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$  के बीच के कोण की ज्या (साइन) ज्ञात कीजिए ।

3

- (ग) यदि  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{25}$  और  $x = 0$  पर  $y = 5$  प्राप्त हो, तो  $x$  ज्ञात कीजिए जबकि  $y = 2$  है ।

3

5. (क) 9 महीनों के अंतराल में प्रत्येक महीने किसी राजमार्ग पर होने वाली दुर्घटनाओं की संख्या 15, 18, 9, 11, 14, 10, 8, 13, 19 अंकित की गई । 5% सार्थकता स्तर पर जाँच कीजिए कि क्या ये बारम्बारताएँ इस धारणा से कि इन 9 महीनों में होने वाली दुर्घटनाओं की संख्या समान थी, सहमति रखती हैं । 5% सार्थकता स्तर पर 8 और 9 स्वातंत्र्य-कोटि के लिए  $\chi^2$  के सारणी मान क्रमशः 15.5 और 16.9 दिए गए हैं । 4

- (ख) उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 5 है और जिसका केन्द्र समतल  $x + y + 2z = 2$  और सरल रेखा  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-0}{-1}$  का प्रतिच्छेद बिन्दु है । 3

- (ग) वक्र  $y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$  जिस बिन्दु पर  $x$ -अक्ष को काटता है, उस बिन्दु पर वक्र के अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए । 3

6. (क) प्रतिदर्श के रूप में लिए गए 6 भार क्रमशः 14.3, 16.6, 15.7, 14.8, 16.2 और 15.4 किलोग्राम हैं । (i) समष्टि माध्य का अनभिन्नत आकलन ज्ञात कीजिए । (ii) आकलित समष्टि मानक विचलन से प्रतिदर्श मानक विचलन की तुलना कीजिए । 4

(ख) मूल्यांकन कीजिए :

3

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-3} + \sqrt{x} - \sqrt{3}}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

(ग) रेखाओं  $x + 2y = 1$  और  $2x - 3y + 2 = 0$  के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाने वाली उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा  $3x + y + 9 = 0$  पर लंब है ।

3

7. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य । संक्षिप्त उपपत्ति अथवा प्रत्युदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए ।

5×2=10

(i) आँकड़ों 2, 4, 6, 8, 10, 98, 100 के लिए केन्द्रीय प्रवृत्ति का सबसे अच्छा माप माध्य है ।

(ii)  $|a \times b|$  अधिकतम होता है जब  $a$  और  $b$  समान्तर होते हैं ।

$$(iii) f(x) = \begin{cases} 0.02(10 - x); & 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

यादृच्छिक चर  $X$  का p.d.f है ।

(iv)  $0 < x \leq 1$  के लिए फलन  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  वर्धमान है ।

(v) आमाप 5 वाली समष्टि से प्रतिस्थापन किए बिना  
आमाप 3 वाले  $5^3$  सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श प्राप्त किए  
जा सकते हैं ।

---