No. of Printed Pages : 8

MTE-02

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

00222

December, 2015

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-02 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage 70%)

Note : *Question no. 7 is* ***compulsory****. Attempt any* ***four*** *questions from Questions no. 1 to 6. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

---

1. (a) Show that the set of all 3×3 upper triangular matrices with entries from **R** is a vector space over **R** under usual addition and scalar multiplication of matrices. Find a basis of this vector space. *5*

(b) Let S and T be linear operators on V such that the range of T is contained in the kernel of S. Show that SoT = 0. Also show that rank (T) + rank (S) $\leq$ dim (V). *3*

(c) Find the minimal polynomial of the matrix *2*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Check if (1, 3, 0) lies in the range of a linear operator T on $\mathbf{R}^3$ given by

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + x_3, x_1 - x_2).$$

Is T one-one and onto ? Give reasons. *3*

(b) Let $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z = 0\}$. Check if W is a subspace of $\mathbf{R}^3$. Find a non-zero subspace U of $\mathbf{R}^3$ so that $W \cap U = \{0\}$. *5*

(c) Let V be the real vector space of polynomials over $\mathbf{R}$ of degree at most 2 and W be the subspace of V generated by $\{1 + x^2, 1 + 2x^2\}$. Find the kernel of the differential linear operator $\frac{d}{dx}$ on W. *2*

3. (a) Show that $\{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 1, 0)\}$ is a basis of $\mathbf{R}^3$. Find a basis dual to this basis. *5*

(b) Find the eigenvalues and eigenvectors for the matrix $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Is this matrix diagonalisable ? *5*

4. (a) Let A be a 3×3 matrix A with eigenvalues 1, -2, 2. Find the trace of $A + A^2$. Give reasons to justify your answer. *3*

(b) Check whether the basis

$$B = \{(i, 0, 0), (0, 1 + i, 0), (i, -i, 1)\}$$

for $\mathbf{C}^3$ over $\mathbf{C}$ is an orthogonal basis. Apply Gram – Schmidt orthogonalisation process to B to obtain an orthonormal basis for $\mathbf{C}^3$ over $\mathbf{C}$ under the standard inner product on $\mathbf{C}^3$. *5*

(c) Show that $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = 0$ for infinitely many values of a and b. *2*

5. (a) Using Cayley – Hamilton theorem, evaluate A^7 if $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. *5*

(b) Reduce the quadratic form $8x^2 - 4xy + 5y^2$ to its normal canonical form. Also, find the principal axes. *5*

6. (a) Why is the matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ orthogonally similar to a diagonal matrix ? Find an orthogonal matrix P so that $P^t A P$ is a diagonal matrix. *5*

(b) Let $W = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}$. Show that W is a subspace of $\mathbf{R}^2$. Find the dimension of W. Also show that the cosets of W are lines $2x + 3y + c = 0$, where $c \in \mathbf{R}$. *5*

7. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer either with a short proof or with a counter-example. *5×2=10*

(i) An $n \times n$ matrix always has n distinct eigenvalues.

(ii) Union of two linearly independent sets is also a linearly independent set.

(iii) If A is a unitary matrix then its entry cannot be 2.

(iv) For a square matrix A, $A^2 = I$ implies $A = I$ or $A = -I$.

(v) If T is linear operator on a finite dimensional vector space V with zero as an eigenvalue, then T is not invertible.

एम.टी.ई.-02

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2015

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-02 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे — *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का 70%)

नोट : *प्रश्न सं. 7 करना **ज़रूरी** है । प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

---

1. (क) दिखाइए कि आव्यूहों की साधारण जमा और अदिश गुणन के अधीन **R** से प्रविष्टियों वाले सभी 3×3 उपरि त्रिभुजीय आव्यूहों का समुच्चय **R** पर सदिश समष्टि है । इस सदिश समष्टि का आधार ज्ञात कीजिए । *5*

(ख) मान लीजिए S और T, V पर ऐसी रैखिक संक्रियाएँ हैं जिसमें T का परिसर, S की अष्टि में आविष्ट है । दिखाइए कि $S \circ T = 0$ । यह भी दिखाइए कि

$$\text{rank}(T) + \text{rank}(S) \le \dim(V).$$ *3*

(ग) आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ का अल्पिष्ठ बहुपद ज्ञात कीजिए । *2*

2. (क) जाँच कीजिए कि $\mathbf{R}^3$ पर

$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + x_3, x_1 - x_2)$ द्वारा दिए गए रैखिक संकारक T के परिसर में (1, 3, 0) स्थित है या नहीं । क्या T एकैकी और आच्छादक है ? कारण बताइए । *3*

(ख) मान लीजिए $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z = 0\}$. जाँच कीजिए कि क्या W, $\mathbf{R}^3$ की उपसमष्टि है । $\mathbf{R}^3$ की ऐसी शून्येतर उपसमष्टि U ज्ञात कीजिए जिससे कि $W \cap U = \{0\}$. *5*

(ग) मान लीजिए V, **R** पर अधिक-से-अधिक 2 घात के बहुपदों की वास्तविक सदिश समष्टि है और W, $\{1 + x^2, 1 + 2x^2\}$ द्वारा जनित V की उपसमष्टि है । W पर अवकल रैखिक संकारक $\frac{d}{dx}$ की अष्टि ज्ञात कीजिए । *2*

3. (क) दिखाइए कि $\{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 1, 0)\}$, $\mathbf{R}^3$ का आधार है । इस आधार का द्वैत आधार ज्ञात कीजिए । *5*

(ख) आव्यूह $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ के आइगेनमान और आइगेनसदिश ज्ञात कीजिए । क्या यह आव्यूह विकर्णनीय है ? *5*

4. (क) मान लीजिए A आइगेनमानों 1, –2, 2 वाला 3×3 आव्यूह A है । $A + A^2$ का अनुरेखण ज्ञात कीजिए । कारण देते हुए अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *3*

(ख) जाँच कीजिए कि $\mathbf{C}$ पर $\mathbf{C}^3$ के लिए आधार

$$B = \{(i, 0, 0), (0, 1 + i, 0), (i, -i, 1)\}$$

एक लांबिक आधार है या नहीं । $\mathbf{C}^3$ पर मानक आंतर गुणनफल के अधीन $\mathbf{C}$ पर $\mathbf{C}^3$ के लिए प्रसामान्य-लांबिक आधार प्राप्त करने के लिए B पर ग्राम – श्मिट लांबिकीकरण प्रक्रिया लागू कीजिए । 5

(ग) दिखाइए कि a और b के अनंततः कई मानों के लिए

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = 0.$$ 2

5. (क) कैले – हैमिल्टन प्रमेय का प्रयोग करके A^7 का मूल्यांकन कीजिए यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. 5

(ख) द्विघाती समघात $8x^2 - 4xy + 5y^2$ को प्रसामान्य विहित समानयन तक समानीत कीजिए । इसके मुख्य अक्ष भी ज्ञात कीजिए । 5

6. (क) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ लांबिकतः विकर्ण आव्यूह के समान क्यों है ? एक ऐसा लांबिक आव्यूह P ज्ञात कीजिए जिसमें $P^t A P$ विकर्ण आव्यूह हो । 5

(ख) मान लीजिए $W = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}$. दिखाइए कि W, $\mathbf{R}^2$ की उपसमष्टि है । W की विमा ज्ञात कीजिए । यह भी दिखाइए कि W के सहसमुच्चय, रेखाएँ $2x + 3y + c = 0$ हैं, जहाँ $c \in \mathbf{R}$. *5*

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य ? संक्षिप्त उपपत्ति या प्रत्युदाहरण के साथ अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *5×2=10*

(i) एक $n \times n$ आव्यूह के सदैव n अलग-अलग आइगेनमान होते हैं ।

(ii) दो रैखिकत: स्वतंत्र समुच्चयों का सम्मिलन भी रैखिकत: स्वतंत्र समुच्चय है ।

(iii) यदि A एक ऐकिक आव्यूह है तब इसकी प्रविष्टि 2 नहीं हो सकती ।

(iv) वर्ग आव्यूह A के लिए, $A^2 = I$ का अर्थ है $A = I$ या $A = -I$.

(v) यदि T परिमित विमीय सदिश समष्टि V पर शून्य आइगेनमान वाला रैखिक संकारक है, तब T व्युत्क्रमणीय नहीं होता ।