

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

02132

December, 2015

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-01 : CALCULUS**

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage 70%)

Note : Question no. 1 is **compulsory**. Attempt any **four** questions from Q. No. 2 to Q. No. 7. Use of calculators is **not** allowed.

1. State whether the following statements are true or false. Justify your answer with the help of a short proof or a counter example.

10

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) = \frac{1}{2}.$

- (b) If $f''(a) = 0$, then the function f has an extreme value at $x = a$.

- (c) A function f defined by

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)(2-x); & 1 \leq x \leq 2 \\ 3-x; & x > 2 \end{cases}$$

is differentiable at $x = 2$.

(d)
$$\frac{d}{dx} \left[\int_1^{\tan x} \sqrt{\tan^{-1} t} \, dt \right] = \sqrt{x} \sec^2 x + \sqrt{\frac{\pi}{4}}.$$

- (e) The function f defined by

$f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 6x + 7$ is increasing for all real values of x .

2. (a) Evaluate :

3

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1 + \sqrt{\cot x}}$$

- (b) Find the domain of the function

4

$$f(x) = \sqrt{\frac{4-x^2}{[x]+2}}.$$

- (c) Use Simpson's rule to evaluate $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx$,

by dividing the interval into 4 subintervals.

3

3. (a) Determine the values of a and b for which the function

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x + a \sin 2x + b \sin x}{x^5}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

is continuous at $x = 0$.

4

- (b) If $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \ln\left(\frac{x}{n}\right)^n$, check whether $x^2 y_{n+2} + (2n+1)x y_{n+1} - 2n^2 y_n = 0$.

4

- (c) Prove that for every $x > 0$,

$$\tan^{-1} x > \frac{x}{1+x^2}.$$

2

4. (a) Evaluate :

2

$$\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x} dx$$

- (b) Differentiate $y = (\sin x)^{\ln x} + x^x$ w.r.t. x .

4

- (c) Find the length of the loop of the curve given by $3y^2 = x(x-1)^2$.

4

5. (a) If $y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-x} - \sqrt{x}\sqrt{1-x^2}\right]$, find $\frac{dy}{dx}$.

3

- (b) Evaluate : 4

$$\int \frac{1}{3 + 5 \sin x + 3 \cos x} dx$$

- (c) Find the equations of tangents to the curve $y = x^3$ which are parallel to the line $12x - y - 3 = 0$. 3

6. (a) Find all the asymptotes to the curve $x^3 + y^3 = 3ax^2$. 3

- (b) Evaluate : 3

$$\int \frac{x \tan^{-1} x}{(1 + x^2)^{3/2}} dx$$

- (c) Find the volume of the solid of revolution obtained by rotating the curve $x = 3 \cos^3 \theta$, $y = 3 \sin^3 \theta$ about the x-axis. 4

7. Trace the curve $x(y^2 + 4) = 16$, stating all the properties you use for doing so. 10

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2015

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-01 : कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50
(कुल का 70%)

नोट: प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। संक्षिप्त उपपत्ति अथवा प्रत्युदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

10

(क) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) = \frac{1}{2}.$

(ख) यदि $f''(a) = 0$, तो फलन f का $x = a$ पर चरम मान होगा।

$$(ग) \quad f(x) = \begin{cases} (1-x)(2-x); & 1 \leq x \leq 2 \\ 3-x; & x > 2 \end{cases} \quad \text{द्वारा}$$

परिभाषित फलन f , $x = 2$ पर अवकलनीय है ।

$$(घ) \quad \frac{d}{dx} \left[\int_1^{\tan x} \sqrt{\tan^{-1} t} \, dt \right] = \sqrt{x} \sec^2 x + \sqrt{\frac{\pi}{4}}.$$

(ङ) $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 6x + 7$ द्वारा परिभाषित फलन f , x के सभी वास्तविक मानों के लिए वर्धमान है ।

2. (क) मूल्यांकन कीजिए :

3

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1 + \sqrt{\cot x}}$$

(ख) फलन $f(x) = \sqrt{\frac{4-x^2}{[x]+2}}$ का प्रांत ज्ञात कीजिए ।

4

(ग) सिम्पसन नियम का प्रयोग करके अन्तराल को

4 उपअन्तरालों में विभाजित करके $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ का

मूल्यांकन कीजिए ।

3

3. (क) a और b के उन मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए फलन

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x + a \sin 2x + b \sin x}{x^5}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ पर संतत है।

4

- (ख) यदि $\cos^{-1} \left(\frac{y}{b} \right) = \ln \left(\frac{x}{n} \right)^n$, तो जाँच कीजिए कि

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1) x y_{n+1} - 2n^2 y_n = 0.$$

4

- (ग) प्रत्येक $x > 0$ के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$\tan^{-1} x > \frac{x}{1+x^2}.$$

2

4. (क) मूल्यांकन कीजिए :

2

$$\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x} dx$$

- (ख) x के सापेक्ष $y = (\sin x)^{\ln x} + x^x$ को अवकलित कीजिए।

4

- (ग) दिए गए वक्र $3y^2 = x(x-1)^2$ के पाश की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

4

5. (क) यदि $y = \sin^{-1} \left[x \sqrt{1-x} - \sqrt{x} \sqrt{1-x^2} \right]$, तो

$$\frac{dy}{dx} \text{ ज्ञात कीजिए।}$$

3

(ख) मूल्यांकन कीजिए :

4

$$\int \frac{1}{3 + 5 \sin x + 3 \cos x} dx$$

(ग) वक्र $y = x^3$ की उन स्पर्शियों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो कि रेखा $12x - y - 3 = 0$ के समांतर हैं ।

3

6. (क) वक्र $x^3 + y^3 = 3ax^2$ की सभी अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए ।

3

(ख) मूल्यांकन कीजिए :

3

$$\int \frac{x \tan^{-1} x}{(1 + x^2)^{3/2}} dx$$

(ग) वक्र $x = 3 \cos^3 \theta$, $y = 3 \sin^3 \theta$ को x -अक्ष के प्रति घुमाने पर प्राप्त परिक्रमण घनाकृति का आयतन ज्ञात कीजिए ।

4

7. वक्र $x(y^2 + 4) = 16$ का अनुरेखण कीजिए, ऐसा करने के लिए इस्तेमाल किए गए सभी गुणधर्मों का स्पष्ट वर्णन कीजिए ।

10