00742

No. of Printed Pages : 8

PHE-14

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)

Term-End Examination

December, 2014

PHYSICS

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS-III

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *All questions are compulsory, but internal choices are given. Symbols have their usual meanings. The marks for each question are indicated against it.*

1. Attempt any ***five*** parts : *5×2=10*

(a) Show that the 2 × 2 matrix $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ is both Hermitian and unitary.

(b) Locate and name the singularities of the function,

$$f(z) = \frac{\log(z-1)}{z^2}$$

in the finite z-plane.

(c) Using Rodrigues' formula for Legendre polynomials :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n,$$

obtain the value of $P_2(x)$.

(d) Calculate the Laplace transform of $t^{-1/2}$.

(e) If ω is the imaginary cube root of unity, show that the set $\{1, \omega, \omega^2\}$ is a cyclic group of order 3 with respect to multiplication.

(f) Define symmetric and anti-symmetric tensors.

(g) If $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$, calculate the residue of f(z) at the singular points.

(h) Show that

$$L\,[f'(t)] = s\,L\,[f(t)] - f(0),\ s > 0.$$

2. Attempt any ***two*** parts : *2×5=10*

(a) Given $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$,

calculate M^{-1} and M^2. Determine the eigenvalues of M.

(b) Show that every eigenvalue of a unitary matrix is a complex number of unit modulus.

(c) Show that the set of all non-singular square matrices of order n forms a group under multiplication. Is this group abelian ?

3. Attempt any *two* parts : *2×5=10*

(a) Evaluate the contour integral

$$\oint_C \frac{dz}{z^3(z-4)}$$

where the contour C is a circle with $|z| = 3$ traversed counter-clockwise.

(b) Evaluate the integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+4)}$$

by the method of residues.

(c) Show that

$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$ and

$\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$

where z is a complex number $(= x + i y)$.

4. Attempt any *two* parts : *2×5=10*

(a) Determine the Fourier transform of $f(x) = e^{-\mu^2 x^2}$. Plot f(x) and its Fourier transform.

(b) Obtain the inverse Laplace transform of

$$F(s) = \frac{2s-3}{s^2+2s+2}$$

(c) Calculate the Laplace transform of the function $f(t) = \sin 5t \cos 3t$.

5. Attempt any ***two*** parts : *2×5=10*

(a) Show that $P_{-n}(x) = (-1)^n P_n(x)$

where $P_n(x)$ is Legendre polynomial of degree n.

(b) Using the following expression for the Bessel function of order n :

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

show that

$$\frac{d}{dx}[x\,J_1(x)] = x\,J_0(x).$$

(c) Using the generating function

$$g(x, t) = e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)\,t^n}{n!}$$

for the Hermite polynomials, obtain the recurrence relation

$$H_{n+2}(x) = 2x\,H_{n+1}(x) - 2\,(n+1)\,H_n(x)$$

विज्ञान स्नातक (बी.एस सी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2014

भौतिक विज्ञान

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *__सभी__ प्रश्न अनिवार्य हैं लेकिन आन्तरिक विकल्प दिए गए हैं । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं । प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं ।*

1. कोई ***पाँच*** भाग कीजिए : *5×2=10*

(क) सिद्ध कीजिए कि 2×2 आव्यूह $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ हर्मिटी और ऐकिक है ।

(ख) फलन $f(z) = \dfrac{\log(z-1)}{z^2}$

की परिमित z-समतल में विचित्रताओं का निर्धारण कीजिए और उनके नाम बताइए ।

(ग) लेजान्ड्रे बहुपदों के रोड्रिगेज़ सूत्र

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$ का उपयोग कर

$P_2(x)$ का मान प्राप्त कीजिए ।

(घ) $t^{-1/2}$ का लाप्लास रूपान्तर परिकलित कीजिए ।

(ङ) यदि ω, इकाई का अधिकल्पित घनमूल हो, तो सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{1, \omega, \omega^2\}$, गुणन के सापेक्ष कोटि 3 वाला एक चक्रीय समूह है ।

(च) सममित और प्रतिसममित टेन्सर को परिभाषित कीजिए ।

(छ) विचित्र बिन्दुओं पर फलन $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$ के अवशिष्ट परिकलित कीजिए ।

(झ) सिद्ध कीजिए कि

$$L\,[f'(t)] = s\, L\,[f(t)] - f(0),\ s > 0$$

2. कोई *दो* भाग कीजिए : *2×5=10*

(क) दिए गए $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

के लिए M^{-1} और M^2 परिकलित कीजिए । M के लिए आइगेनमान प्राप्त कीजिए ।

(ख) सिद्ध कीजिए कि ऐकिक आव्यूह का प्रत्येक आइगेनमान एकक मापांक की सम्मिश्र संख्या होती है ।

(ग) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह गुणन के अधीन कोटि n वाले सभी व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूहों का समुच्चय, समूह होता है । क्या यह समूह आबेली है ?

3. कोई *दो* भाग कीजिए : $2\times5=10$

(क) कन्टूर समाकल

$$\oint_C \frac{dz}{z^3(z-4)}$$

का मान परिकलित कीजिए जहाँ कन्टूर C वामावर्त दिशा में, $|z| = 3$ को परिभाषित करने वाला वृत्त है ।

(ख) अवशिष्ट विधि का प्रयोग कर निम्न समाकल परिकलित कीजिए :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+4)}$$

(ग) सिद्ध कीजिए कि

$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

और $\frac{d}{dz} \cos z = - \sin z$

जहाँ z एक सम्मिश्र संख्या $(= x + i\,y)$ है ।

4. कोई *दो* भाग कीजिए : $2\times5=10$

(क) फलन $f(x) = e^{-\mu^2 x^2}$ का फूरिये रूपान्तर परिकलित कीजिए । फलन f(x) और उसके फूरिये रूपान्तर का आरेख खींचिए ।

(ख) फलन $F(s) = \frac{2s-3}{s^2+2s+2}$ का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर प्राप्त कीजिए ।

(ग) फलन $f(t) = \sin 5t \cos 3t$ का लाप्लास रूपांतर परिकलित कीजिए ।

5. कोई *दो* भाग कीजिए : *2×5=10*

(क) सिद्ध कीजिए कि $P_{-n}(x) = (-1)^n P_n(x)$ जहाँ $P_n(x)$ कोटि n का लेजान्ड्रे बहुपद है ।

(ख) कोटि n वाले निम्नलिखित बेसल फलन के व्यंजक

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

का उपयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{d}{dx}[x\,J_1(x)] = x\,J_0(x).$$

(ग) हर्मिट बहुपदों के जनक फलन

$$g(x, t) = e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)\,t^n}{n!}$$

का उपयोग कर निम्नलिखित पुनरावृत्ति सम्बन्ध

$H_{n+2}(x) = 2x\,H_{n+1}(x) - 2\,(n+1)\,H_n(x)$

प्राप्त कीजिए ।
